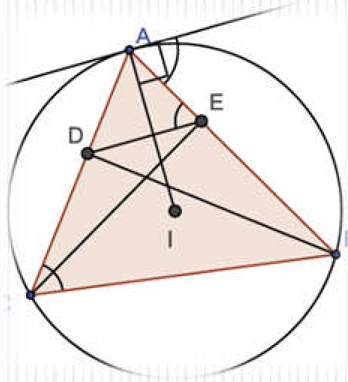
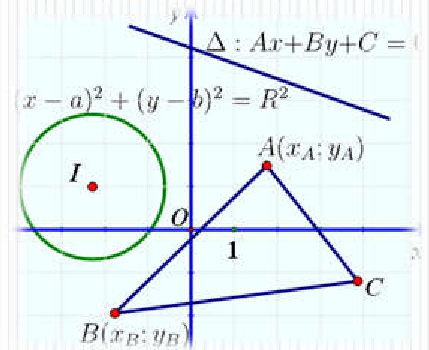
MẪN NGỌC QUANG

HÌNH OXY TUYỂN CHỌN 2016







PHÂN LOẠI
THEO TỪNG CHỦ ĐỀ

➢ **Theo hình đặc trưng**

1.Hình vuông
2.Hình chữ nhật
3.Hình thang
4.Hình bình hành
5.Hình thoi
6.Tam giác : Đều , cân , vuông , thường
7.Đường tròn

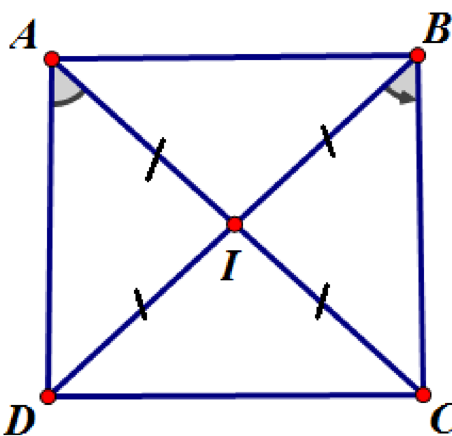
➢ **Theo tính chất hình học**

1.Vuông góc : Thường , vuông cân, vuông trung trực
2.Bằng nhau
3.Thẳng hàng
4.Song song
5.Phân giác
6.Tỉ lệ độ dài



HÌNH OXY : HÌNH VUÔNG

LÝ THUYẾT



Hình vuông có tính chất :

1) $AB = AC = CD = DA$

2) $IA = IB = IC = ID$

3) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^o$

4) $\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = ... = 45^o$

5) AC Vuông góc BD

Câu 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ và M là một điểm thuộc cạnh CD $(M \neq C, D)$. Qua điểm A dựng đường thẳng d vuông góc với AM, d cắt đường thẳng BC tại điểm M. Biết rằng trung điểm của đoạn thẳng MN là gốc tọa độ O, I là giao điểm của AO và BC. Tìm tọa độ điểm B của hình vuông biết $A(-6;4), O(0;0).I(3;-2)$ và điểm N có hoành độ âm.



Phương trình đường thẳng $AB: 7x+4y+26=0$

$AB \cap BC = B \Rightarrow B\left(-\frac{6}{5};-\frac{22}{5}\right)$

Câu 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(4;6)$. Gọi M,N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0, M(-4;0)$ và đường thẳng MN có phương trình $:11x+2y+44=0$. Tìm tọa độ các điểm B,C,D.

$B(0;-2), C(-8;2), D(-4;10)$

Câu 3 (Thpt – Chu Văn An – An Giang) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x+2y-6=0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Đáp số : $C(2;2)$

Câu 4 (THPT - Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm *I*. Trung điểm cạnh *AB* là $M(0;3)$, trung điểm đoạn *CI* là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh *D* thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.

Đáp số : $A(-2;3), B(2;3), C(2;-1), D(-2;-1)$.

Câu 5 (THPT – Hiền Đa – Phú Thọ) Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $C(2;-2)$. Gọi điểm I,K lần lượt là trung điểm của DA và DC; $M(-1;-1)$ là giao của BI và AK. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$ biết điểm *B* có hoành độ dương.

Đáp số: $A(-2;0), B(1;1), D(-1;-3)$.

Câu 6 (THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 2 – 2016) – Quan hệ vuông góc



Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm B thuộc đường thẳng $2x-y=0.$ Điểm M $M(-3;0)$ là trung điểm $AD,$ điểm $K(-2;-2)$ thuộc cạnh DC sao cho $KC=3KD.$ Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

- Vậy $A(-3;2), B(1;2), C(1;-2), D(-3;-2)$

Câu 7(1,0 điểm). CHUYÊN HẠ LONG Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(4;6)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0, M(-4;0)$ và đường thẳng MN có phương trình $11x+2y+44=0$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

$B(0;-2)$ $D(-4;10)$

Câu 8 – Chuyên Biên hòa **:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD tâm I, G là trọng tâm tam giác ABI, M là trung điểm AI, đường thẳng qua G và cắt ID tại E (7;-2) sao cho $GE=2GM$. Viết phương trình AB biết A có tung độ dương và $AG: 3x-y=13$

Vậy $A(5;2)$,

Câu 9 : CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – ĐÀ NẴNG

Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông ABCD , điểm $F(\frac{11}{2};3)$ là trung điểm của AD , điểm E là trung điể AB , điểm K thuộc CD sao cho KD = 3KC . Đường thẳng EK có phương trình là 19x – 8y – 18 = 0 . Tìm tọa độ điểm C của hình vuông biết rằng điểm E có hành độ nhỏ hơn 3 .

$C(3,8)$

THANH CHƯƠNG 1 – NGHỆ AN



Câu 10 (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Các điểm $G\left(\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right), E\left(3;-\frac{2}{3}\right)$ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABI và tam giác ADC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết tung độ đỉnh A là số nguyên.

$A(-1;4), B(7;6), C(9;-2), D(1;-4)$

Câu 11 : Đề 6 – NHÓM HỌC SINH THẦY QUANG BABY

Cho hình vuông $ABCD$ tâm K, M là điểm di động trên cạnh AB. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AM = AE$, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BM = BF$, phương trình $EF: x-2=0$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M tới đường thẳng EF. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH là $x^2+y^2+4x-2y-15=0$ và tung độ điểm A và điểm H dương.

$A(0;5), B(-4;-3), C(4;-7), D(8;1)$

Câu 12 – Đề 11 (ĐỀ THI NHÓM HỌC SINH THẦY QUANG BABY)

Cho hình vuông $ABCD$, vẽ hai đường tròn (C_1) có đường kính là AD và (C_2) có bán kính là AD tâm D. Lấy điểm P thuộc (C_2) sao cho AP có phương trình $x-2y+3=0$. Đường thẳng DP cắt (C_1) tại N biết rằng AN có phương trình $x+3y-7=0$. Tìm các đỉnh hình vuông biết rằng điểm $E(9;6)$ thuộc đường thẳng CD.

Vậy $A(1;2), B(3;8), C(9;6), D(7;0)$

Câu 13 – Đề 19 (Nhóm Học Sinh Thầy Quang Baby) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(4;6)$. Goi M, N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0, N(-5;8)$ và đường thẳng MN có phương trình $38x+y+182=0$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D

$B(0;-2)$



Bài 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm E(7;3) là một điểm nằm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường chéo BD tại điểm $N(N \neq B)$. Đường thẳng AN có phương trình 7x +11y + 3 = 0 . Tìm tọa độ các đỉnhA, B, C,D của hình vuông ABCD , biết A có tung độ dương, C có tọa độ nguyên và nằm trên đường thẳng $2x - y - 23 = 0$.

(Đề thi thử THPT Hàn Thuyên Bắc Ninh 2016 Lần 1)

Câu 18. (Đề 22 – thầy Quang Baby) :

Cho hình vuông ABCD, A(1;4), vẽ hai đường tròn (C_1) có đường kính AD và (C_2) có bán kính AD tâm D. Lấy điểm P nằm trên đường tròn (C_2), AP có phương trình x + y – 5 = 0. Đường thẳng DP cắt đường tròn (C_1) tại N, AN có phương trình 3x – 5y + 17 = 0. Tìm các đỉnh hình vuông biết rằng $x_C > 0$, điểm E(7; -2) thuộc đường thẳng BC.

Bài 19: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho AE = AF. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên DE. Biết $H\left(\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $F\left(\frac{8}{3};-2\right)$, C thuộc đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$, D thuộc đường thẳng $d': x - 3y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(Đề thi thử THPT Thuận Thành 1 Bắc Ninh 2016 Lần 2)

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $C(-4;-3)$ và M là một điểm nằm trên cạnh AB (M không trùng với A và B). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, C lên DM và $I(2;3)$ là giao điểm của CE và BF. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 10 = 0$



(Đề thi thử THPT Yên Thế 2016 Lần 3)

Kết luận: $A(8;1), B(0;5), D(4;-7)$

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có K là điểm đối xứng với A qua B. Trên cạnh BC, CD lấy các điểm M và N thỏa mãn $BM = DN$. Phương trình đường thẳng $MK: x - y = 0$, điểm $N(-1;-5)$. Viết phương trình cạnh AB biết điểm A thuộc trục hoành và điểm M có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Offine Thầy Nguyễn Đại Dương sienghoc.com Lần 7)

Bài 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD . Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB, CD thỏa mãn $AM = DN$. Đường thẳng qua M và vuông góc BN cắt cạnh AC tại E. Biết $E(-10;3)$, phương trình $MN: x - 2y + 1 = 0$, điểm C thuộc $d: 3x - y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

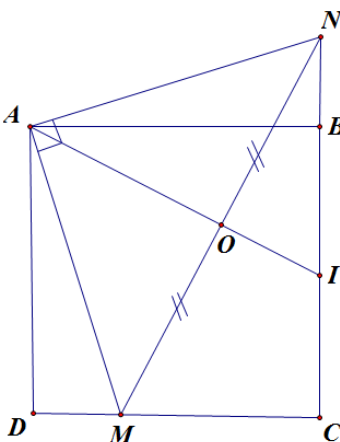
(Đề thi thử THPT Offine Thầy Nguyễn Đại Dương sienghoc.com Lần 8)

Bài 24: Cho hình vuông ABCD có tâm I. gọi M là điểm đối xứng của D qua C. Gọi H,K lần lượt là chân đường cao hạ từ D, C lên AM. Giả sử K(1;1), đỉnh B thuộc đt: 5x+3y-10=0 và pt đt HI: 3x+y+1=0. Tìm đọa độ đỉnh B.



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ và M là một điểm thuộc cạnh CD $(M \neq C, D)$. Qua điểm A dựng đường thẳng d vuông góc với AM, d cắt đường thẳng BC tại điểm N Biết rằng trung điểm của đoạn thẳng MN là gốc tọa độ O, I là giao điểm của AO và BC. Tìm tọa độ điểm B của hình vuông biết $A(-6;4), O(0;0).I(3;-2)$ và điểm N có hoành độ âm.



Ta có:

$\widehat{NAB} = \widehat{MAD}$ (Cùng phụ $\widehat{BAM}$)

ΔABN và ΔADM có: $\begin{cases} AB = AD \\ \widehat{DAM} = \widehat{BAN} \\ \widehat{ADM} = \widehat{ABN} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta ADM \Rightarrow AM = AN$

O là trung điểm $MN \Rightarrow AO \perp MN$

Mà ΔMAN vuông $\Rightarrow OA = ON$



Phương trình đường thẳng $MN\left(\perp AI\right): 3x-2y=0$

$OA=ON \Rightarrow N\left(-4;-6\right)$ (Thỏa mãn) hoặc $N\left(4;6\right)$ (Loại vì $x_A<0$)

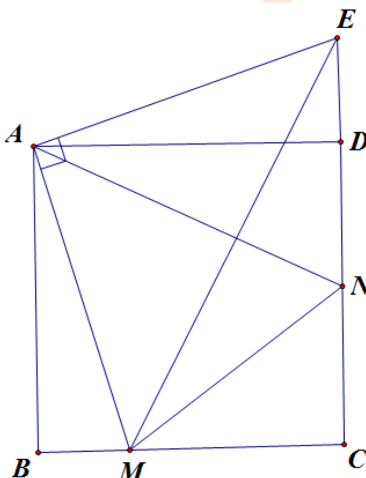
$\Rightarrow N(-4;-6) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BC: 4x-7y-26=0$

Phương trình đường thẳng $AB: 7x+4y+26=0$

$AB \cap BC = B \Rightarrow B\left(-\frac{6}{5};-\frac{22}{5}\right)$

Câu 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A\left(4;6\right)$. Gọi M,N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0, M\left(-4;0\right)$ và đường thẳng MN có phương trình $: 11x+2y+44=0$. Tìm tọa độ các điểm B,C,D.

Bài giải



Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt CD tại E

$\Rightarrow \widehat{EAM}=\widehat{BAD}=90^0 \Rightarrow \widehat{EAD}=\widehat{BAM}$ (Phụ góc $\widehat{MAD}$)

ΔADE và ΔAMB $\begin{cases} AD=AB \\ \widehat{EAD}=\widehat{BAM} \end{cases} \Rightarrow \Delta ADE=\Delta ABM \Rightarrow AM=AE$

Mà $\widehat{MAN}=\widehat{NAE}=45^0 \Rightarrow$ AN là đường phân giác $\widehat{MAE}$ $\Rightarrow AN \perp ME$

Mà $AE \perp AM \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AE: 4x+3y-34=0$



$$AE = AM \Rightarrow \begin{cases} E(10;-2) \\ E(-2;14) \end{cases}$$

Với $E(10;-2)$, phương trình đường thẳng $AN: 7x - y - 22 = 0$.

$AN \cap MN = N \Rightarrow N(0;-22) \Rightarrow D(12;2), B(0;-2), C(8;-6)$ (loại vì xét điều kiện D,N cùng phía AM)

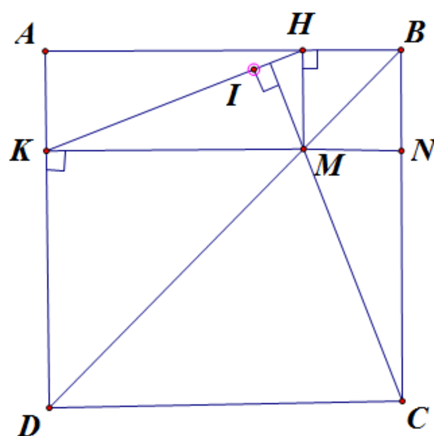
Với $E(-2;14)$, phương trình đường thẳng $AN: x + 7y - 46 = 0$.

$$AN \cap MN = N \Rightarrow N\left(-\frac{16}{3};\frac{22}{3}\right) \Rightarrow B(0;-2), C(-8;2), D(-4;10)$$

Câu 3 (Thpt – Chu Văn An – An Giang) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 6 = 0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Đáp số : $C(2;2)$

Bài giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AD.

Gọi $KM \cap BC \equiv N, CM \cap HK \equiv I$.



Ta có ΔDKM vuông tại K và $\widehat{DKM}=45^0 \Rightarrow KM=KD \Rightarrow KM=NC$ (1)

Lại có $MH=MN$ (Do $\square MHBN$ là hình vuông)

$\Rightarrow \Delta KMH$ vuông và ΔCNH vuông bằng nhau $\Rightarrow \widehat{HKM}=\widehat{MCN}$

Mà $\widehat{NMC}=\widehat{IMK}$ nên $\widehat{NMC}+\widehat{NCM}=\widehat{IMK}+\widehat{HKM}=90^0 \Rightarrow CI\perp HK$.

Đường thẳng CI đi qua $M(1;1)$ và vuông góc với đường thẳng d nên có VTPT

$\overrightarrow{n_{CI}}=(1;-1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $CI: x-y=0$.

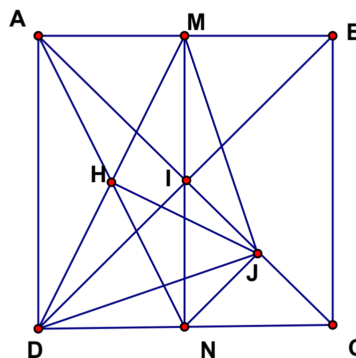
Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C(2;2)$

- Vậy $C(2;2)$

Câu 4 (THPT - Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.

Đáp số : $A(-2;3), B(2;3), C(2;-1), D(-2;-1)$.

Bài giải



Gọi N là trung điểm CD và H là tâm hình chữ nhật $AMND$. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $AMND$. Từ giả thiết, suy ra $NJ // DI$, do đó $NJ\perp AC$ NJ hay



$J \in (C)$ (Vì AN là đường kính của (C)). Mà MD cũng là đường kính của (C) nên $JM \perp JD$ (1)

$D \in \Delta$ nên $D(t;t+1) \Rightarrow \overrightarrow{JD} = (t-1;t+1), \overrightarrow{JM} = (-1;3)$. Theo (1)

$\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -t+1+3t+3=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow D(-2;-1)$.

Gọi a là cạnh hình vuông $ABCD$. Dễ thấy $DM = 2\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = 4$.

Gọi $A(x;y)$. Vì $\begin{cases} AM = 2 \\ AD = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; y=3 \\ x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5} \end{array}\right.$

- Với $A(-2;3) \Rightarrow B(2;3) \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow C(2;-1) \Rightarrow J(1;0)$ (Thỏa mãn)

- Với $A\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{6}{5};\frac{23}{5}\right) \Rightarrow I\left(\frac{-8}{5};\frac{9}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{-22}{5};\frac{11}{5}\right) \Rightarrow J(-3;2)$ (Loại).

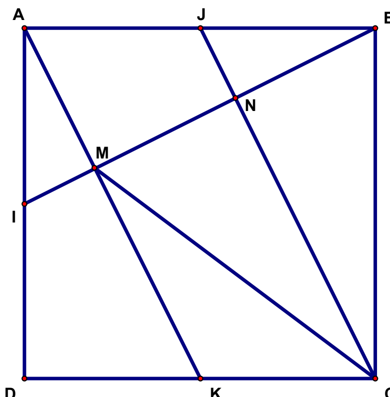
Vậy tọa độ các đỉnh hình vuông là $A(-2;3), B(2;3), C(2;-1), D(-2;-1)$.

Câu 5 **(THPT – Hiền Đa – Phú Thọ)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $C(2;-2)$. Gọi điểm I,K lần lượt là trung điểm của DA và DC; $M(-1;-1)$ là giao của BI và AK. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$ biết điểm B có hoành độ dương.

Đáp số: $A(-2;0), B(1;1), D(-1;-3)$.

Bài giải





Gọi J là trung điểm của AB. Khi đó $\square AJKC$ là hình bình hành $\Rightarrow AK // CJ$.

Gọi $CJ \cap BM \equiv N \Rightarrow N$ là trung điểm của BM.

Chứng minh được $AK \perp BI \Rightarrow \Delta BMC$ cân tại C.

Ta có $\overrightarrow{MC}(3;-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow CM = BM = AB = \sqrt{10}$.

Trong ΔABM vuông có:

$$AB^2 = BM.BI = BM.\sqrt{AB^2 + AI^2} = BM.AB\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow BM = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow B$ là giao của hai đường tròn $\left(C;\sqrt{10}\right)$ và $\left(M;2\sqrt{2}\right)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn:

$$\begin{cases}(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 8\end{cases} \Rightarrow B(1;1).$$

Phương trình đường thẳng AB có dạng $: x - 3y + 2 = 0$.

Phương trình đường thẳng AM có dạng $: x + y + 2 = 0$.

$\Rightarrow A(-2;0)$.

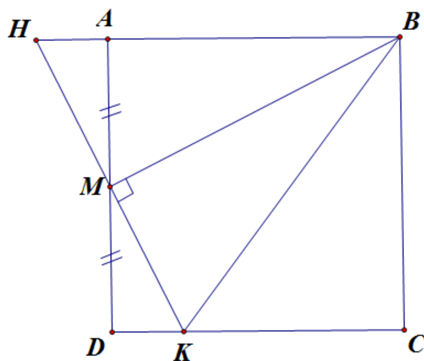
Ta có $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow D(-1;-3)$.

Câu 6 (THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 2 – 2016) – Quan hệ vuông góc



Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm B thuộc đường thẳng $2x-y=0$. Điểm M $M(-3;0)$ là trung điểm AD, điểm $K(-2;-2)$ thuộc cạnh DC sao cho $KC=3KD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Bài giải



Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow \widehat{AMB}=60^0$

$\frac{MD}{MK}=2\Rightarrow \widehat{DMK}=30^0$

$\Rightarrow \widehat{BMK}=90^0\Rightarrow BM\perp MK$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BM: x-2y+3=0\Rightarrow B(1;2)$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là VTPT của AB

$\triangle DMK \backsim \triangle ABM\Rightarrow MK=\frac{BK}{2}\Rightarrow \widehat{MBK}=30^0$

$\Rightarrow MB$ là phân giác của $\widehat{ABK}$

Lấy đối xứng với K qua M được điểm $H\Rightarrow H(-4;2)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AB: y-2=0.$



$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AD: x+3=0.$

$\Rightarrow A(-3;2)$
$\Rightarrow D(-3;-2)$
$\Rightarrow C(1;-2)$

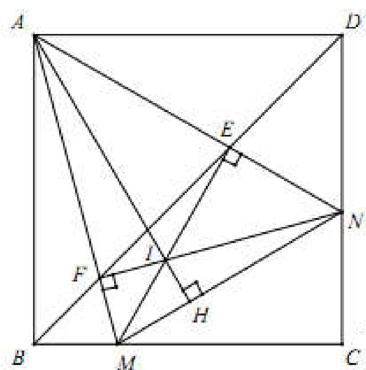
- Vậy $A(-3;2), B(1;2), C(1;-2), D(-3;-2)$

Câu 7(1,0 điểm). **CHUYÊN HẠ LONG** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(4;6)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0, M(-4;0)$ và đường thẳng MN có phương trình $11x+2y+44=0$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

Bài giải :

Gọi $E=BD\cap AN, F=BD\cap AM, I=ME\cap NF$

Ta có: $\widehat{MAN}=\widehat{NBD}=\widehat{MBD}=45^0$ nên hai tứ giác ADNF, ABNE nội tiếp. Do đó



$ME\perp AN, NF\perp AM$.

Suy ra $AI\perp MN$

Gọi $H=AI\cap MN$. Ta có $ABME, MNEF$ là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMB}=\widehat{AEB}=\widehat{AMH}$.

Suy ra $\Delta AMB=\Delta AMH$. Do đó B là đối xứng của H qua đường thẳng AM.



Từ $AH \perp MN$ tại Hm tìm được $H\left(-\frac{24}{5};\frac{22}{5}\right)$. Do B là đối xứng của H qua AM, nên tìm được $B(0;-2)$

Tìm được $BC: 2x+4y+8=0, CD: 2x-y+18=0$ suy ra $C(-8;2)$

Từ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ta tìm được $D(-4;10)$

Câu 8 – Chuyên Biên hòa : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD tâm I, G là trọng tâm tam giác ABI, M là trung điểm AI, đường thẳng qua G và cắt ID tại E (7;-2) sao cho $GE=2GM$. Viết phương trình AB biết A có tung độ dương và $AG: 3x-y=13$

Bài giải :

ABI vuông cân tại I, G là trọng tâm

$\Rightarrow \widehat{AIG}=\widehat{BIG}$

$IA=IB$

$\Rightarrow \Delta AIG=\Delta BIG$

$\Rightarrow GA=GB$

Mà $GB=2GM \Rightarrow GA=2GM$

Mà $GE=2GM \Rightarrow GA=GE$

$\Rightarrow \Delta GAE$ cân tại G

*) $GA=GB=GE$

$\Rightarrow$ G là tâm ngoại tiếp ΔABE

$\Rightarrow \widehat{AGE}=2\widehat{ABE}=90^0$

$\Rightarrow$ Δ AGE vuông cân tại G.

*) Phương trình GE là

$\frac{x-7}{3}=\frac{y+2}{-1} \Leftrightarrow x+3y-1=0$

$\Rightarrow$ Tọa độ G thỏa mãn:

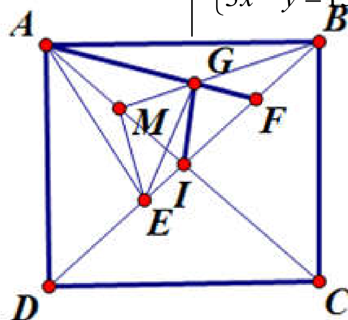
$\begin{cases}x+3y-1=0\\3x-y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases} \Rightarrow G(4;-1)$

$A \in AG \Rightarrow A(a;3a-13)$

$\overrightarrow{GA}=(a-4;3a-12)$

*) $\overrightarrow{GE}=(3;-1)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{GE}\right|=\sqrt{10}$





*) $GA = GE$

$\Rightarrow \sqrt{(a-4)^2 + (3a-12)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \Rightarrow A(5;2)(\text{nhận}) \\ a = 3 \Rightarrow A(3;-4)(\text{loại}) \end{array}\right.$

* Gọi F là giao của AG và BD $\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow F\left(\frac{7}{2};\frac{-5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \left(\frac{-7}{2};\frac{-1}{2}\right)$

Phương trình EF: $x - 7y - 21 = 0$

*) Phương trình AI ($AI \perp EF$) là: $7x + y - 37 = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ I thỏa mãn: $I\left(\frac{28}{5};\frac{-11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \left(\frac{-8}{5};\frac{6}{5}\right)$

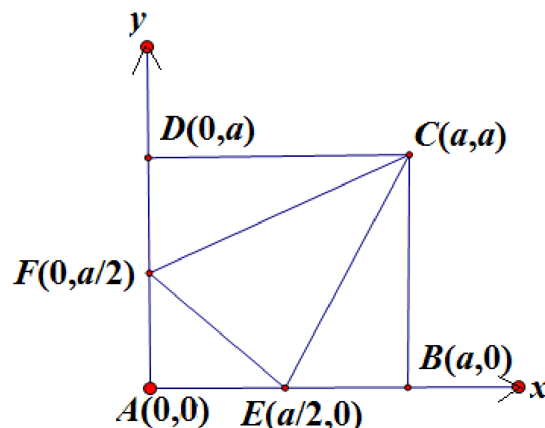
$\Rightarrow$ Phương trình AB (do vuông góc IG) là: $4x - 3y - 14 = 0$

Vậy $A(5;2)$,

Câu 9 : CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – ĐÀ NẴNG

Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông ABCD , điểm $F(\frac{11}{2};3)$ là trung điểm của AD , điểm E là trung điể AB , điểm K thuộc CD sao cho KD = 3KC . Đường thẳng EK có phương trình là 19x – 8y – 18 = 0 . Tìm tọa độ điểm C của hình vuông biết rằng điểm E có hành độ nhỏ hơn 3 .

Bài giải :





Cách 1 dùng chuẩn hóa :

Ta chuẩn hóa như sau (đưa điểm A trùng gốc tọa độ , AB trùng Ox , AD trùng Oy) , mục đích tính độ dài cạnh hình vuông .

Ta biểu diễn tọa độ các điểm trong hệ trục tọa độ mới như hình vẽ . Từ đó tính được

$\overrightarrow{EK}=(\frac{1}{4}a,a)//(1,4)$ vuông góc (-4,1) => phương trình EK : -4x + y + 2a = 0

Theo hình chuẩn hóa : $d(F,EK)=\frac{\left|0-4+\frac{a}{2}+2a\right|}{\sqrt{16+1}}=\frac{5a}{2\sqrt{17}}$

Theo đề bài thì ta lại có : $d(F,EK)=\frac{\left|\frac{11}{2}.19-24-18\right|}{\sqrt{19^2+64}}=\frac{25\sqrt{17}}{34}$

$\Rightarrow a=5$, nên $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$E\in EF\Rightarrow E\left(a;\frac{19a-18}{8}\right)\Rightarrow EF\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=\frac{58}{17}(loai)\end{array}\right.$

Gọi I là trung điểm EF

$\Rightarrow I\left(\frac{15}{4},\frac{11}{4}\right)\Rightarrow AC:7x+y-29=0$

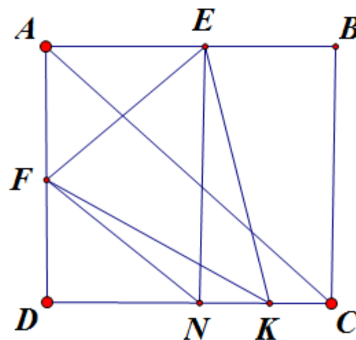
$\Rightarrow C(c,29-7c)$

Ta có $BC=\frac{5\sqrt{5}}{2}\Rightarrow(c-2)^2+(29-7c-\frac{5}{2})^2=(\frac{5\sqrt{5}}{2})^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=3\\ c=\frac{9}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C(3,8)\\ C(\frac{9}{2},-\frac{5}{2})\end{array}\right.$

Xét vị trí của C và EF ta có đáp số là $C(3,8)$

Cách 2 : Dùng Cosin:





$\frac{AB}{4} = a \Rightarrow AB = 4a \Rightarrow AE = AF = 2a$

$MK = KC = \frac{DC}{4} = a$

*)$EF = 2a\sqrt{2}, FK = a\sqrt{13}, EK = a\sqrt{17}$

$\Rightarrow \cos\widehat{FEK} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

*)Gọi véc tơ pháp tuyến của $EF : \vec{n}(a,b)$

$\Rightarrow \frac{|19a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{19^2+64}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

$\Rightarrow 2(19a-8b)^2 = 225(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{97}{71} \\ \frac{a}{b} = \frac{-1}{7} \end{array}\right.$

*)$\frac{a}{b} = \frac{97}{71} \Rightarrow EF : 97(x-\frac{11}{2}) + 71(y-3) = 0$

*)$\frac{a}{b} = \frac{97}{71} \Rightarrow EF : -(x-\frac{11}{2}) + 7(y-3) = 0 \Rightarrow E(2,\frac{5}{2}) \Rightarrow N(\frac{15}{4},\frac{11}{4})$

$\Rightarrow AC : \frac{x-\frac{15}{4}}{-1} = \frac{y-\frac{11}{4}}{7} \Rightarrow 7x+y-29=0 \Rightarrow C(c,29-7c)$



$*)EC(c-2,\frac{53}{2}-7c), EF=2a\sqrt{2}\Rightarrow EC=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow (c-2)^2+(\frac{53}{2}-7c)^2=\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\frac{9}{2} \\ c=3 \end{array}\right.$

Loại trường hợp $c=\frac{9}{2}$ vì điểm C cùng phía vơi A bờ EF .

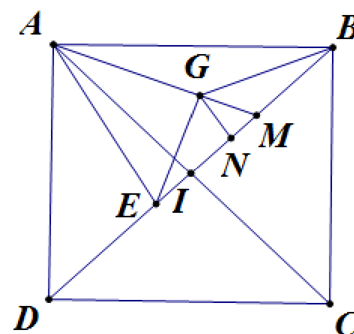
ĐS : $C(3,8)$

THANH CHƯƠNG 1 – NGHỆ AN

Câu 10 (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Các điểm $G\left(\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right), E\left(3;-\frac{2}{3}\right)$ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABI và tam giác ADC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết tung độ đỉnh A là số nguyên.

Bài giải :

Gọi M là trung điểm của BI và N là hình chiếu vuông góc của G lên BI.



Ta có $GN//AI\Rightarrow \frac{IN}{IM}=\frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow IN=\frac{2}{3}IM=\frac{1}{3}BI(1)$

E là trọng tâm ΔACD

$\Rightarrow IE=\frac{1}{3}DI=\frac{1}{3}BI\Rightarrow EN=IN+IE=\frac{2}{3}BI=BN$

$\Rightarrow BN=EN\Rightarrow \Delta BGE$ cân tại G

$\rightarrow GA=GB=GE\rightarrow A,E,B$ cùng thuộc đường tròn tâm G

$\rightarrow \widehat{AGE}=2\widehat{ABE}=2.45^0=90^0\rightarrow \Delta AGE$ vuông cân tại G

Phương trình $(AG):\begin{cases} qua\ G \\ \perp GE \end{cases}\rightarrow (AG): x+13y-51=0\rightarrow A(51-13a;a)$



Khi đó ΔAGE vuông cân tại G $\to AG = GE$

$$\to AG^2 = \left(\frac{143}{3} - 13a\right)^2 + \left(a - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{170}{9} \leftrightarrow \left(a - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \frac{10}{3} \end{array}\right. \to A(-1;4)$$

Ta có $AG = \frac{2}{3}AM \to \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \to M\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$

Phương trình BD đi qua E và M $\to (BD): 5x - 3y - 17 = 0$

Phương trình đường tròn $(G): \begin{cases} tam\ G \\ R = GA \end{cases} \to (G): \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{170}{9}$

B là giao điểm thứ hai của (BD) và G $\to B(7;6)$

Phương trình $(AD): \begin{cases} qua\ A \\ \perp AB \end{cases} \to (AD): 4x + y = 0 \to D(1;-4)$

ABCD là hình vuông $\to \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \to C(9;-2)$.

Bài toán có 1 nghiệm $A(-1;4), B(7;6), C(9;-2), D(1;-4)$

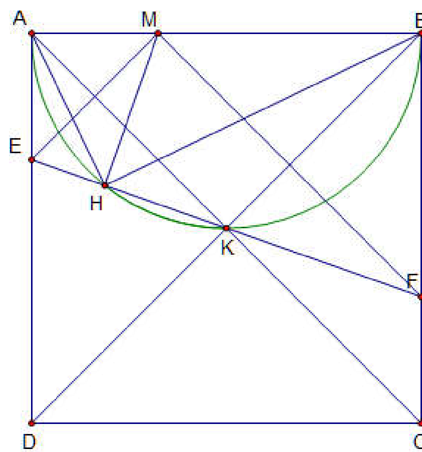
Câu 11 : **Đề 6 – NHÓM HỌC SINH THẦY QUANG BABY**

Cho hình vuông $ABCD$ tâm K, M là điểm di động trên cạnh AB. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AM = AE$, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BM = BF$, phương trình $EF: x - 2 = 0$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M tới đường thẳng EF. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH là $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$ và tung độ điểm A và điểm H dương.

Bài giải :



Do $ABCD$ là hình vuông nên 2 đường chéo vuông góc (tính chất) $\Rightarrow \widehat{AKB} = 90^0$



Tam giác AME vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{AEM} = 45^0$

Tứ giác $AMHE$ nội tiếp nên $\widehat{MHA} = \widehat{MEA} = 45^0$ ‘

Tứ giác $ABFH$ nội tiếp nên $\widehat{MHB} = \widehat{MFB} = 45^0$

Tam giác BMF vuông cân tại $B \Rightarrow BMF = BFM = 45^0$

$\Rightarrow AHB = AHM + BHM = 90^0$

$\Rightarrow ABHK$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\begin{cases} BF = DE \\ BF // DE \end{cases} \Rightarrow BFDE$ là hình bình hành

Mà K là trung điểm của BD rồi nên K cũng là trung điểm của EF , do đó K thuộc EF . Tức là H, K là giao điểm của đường tròn đã cho và đường thẳng EF

Tọa độ K, H thỏa mãn

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 3 \\ x = 2, y = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} H(2;3) \\ K(2;-1) \end{array} \right.$$

Gọi N là trung điểm AB . Suy ra N là tâm đường tròn đường kính AB



Do đó $N\left(-2;1\right)$

Ta có: $\overrightarrow{KN}=\left(-4;2\right)$

Đường thẳng AB đi qua N và vuông góc với KN nên phương trình $AB:2x-y+5=0$

Toạ độ điểm A và B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+y^2+4x-2y-15=0\\2x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,y=5\\x=-4,y=-3\end{cases}$

Mà tung độ điểm A dương. Suy ra $A\left(0;5\right),B\left(-4;-3\right)$

Ta có: K trung điểm AC $\Rightarrow\begin{cases}x_C=2x_I-x_A=2.2-0=4\\y_C=2y_I-y_A=2.\left(-1\right)-5=-7\end{cases}\Rightarrow C\left(4;-7\right)$

Ta có: I trung điểm BD $\Rightarrow\begin{cases}x_D=2x_I-x_B=2.2+4=8\\y_D=2y_I-y_B=2.\left(-1\right)+3=1\end{cases}\Rightarrow D\left(8;1\right)$

Vậy $A\left(0;5\right),B\left(-4;-3\right),C\left(4;-7\right),D\left(8;1\right)$

Câu 12 – Đề 11 (ĐỀ THI NHÓM HỌC SINH THẦY QUANG BABY)

Cho hình vuông $ABCD$, vẽ hai đường tròn $\left(C_1\right)$ có đường kính là AD và $\left(C_2\right)$ có bán kính là AD tâm D. Lấy điểm P thuộc $\left(C_2\right)$ sao cho AP có phương trình $x-2y+3=0$. Đường thẳng DP cắt $\left(C_1\right)$ tại N biết rằng AN có phương trình $x+3y-7=0$. Tìm các đỉnh hình vuông biết rằng điểm $E\left(9;6\right)$ thuộc đường thẳng CD .

Bài giải :



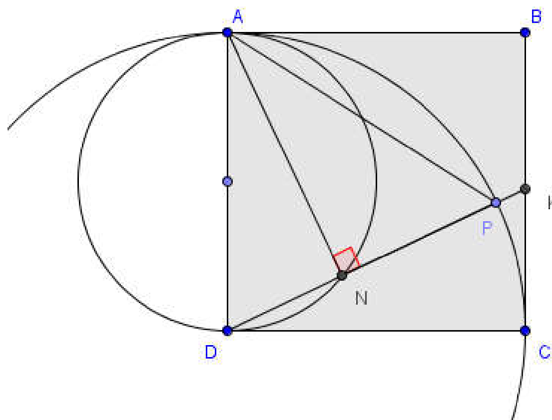
Ta có: vtcp của AP và AN lần lượt là

$\vec{i}(-2;-1)$ và $\vec{j}(3;-1)$

Suy ra

$$\cos\widehat{NAP} = \left|\frac{(-2).3+(-1).(-1)}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{1^2+3^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \widehat{NAP} = 45°$



Suy ra tam giác ANP vuông cân tại N

Trường hợp 1: Nếu N thuộc nửa mặt phẳng bờ AD không chứa C thì

$AN < AD < AP$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu N thuộc nửa mặt phẳng bờ AD chứa C:

Xét P thuộc nửa mặt phẳng bờ AD không chứa C: $AN < AD < AP$ suy ra vô lí

Xét P thuộc nửa mặt phẳng bờ AD chứa C: khi đó gọi DN cắt BC tại K suy ra:

$\widehat{APN} = \widehat{PAD} = 45^0$ (vì AD=DP)

Mà $\widehat{DAC} = 45° \Rightarrow$ vô lí suy ra P trùng C và N trùng D

Khi đó $AC: x-2y+3$ và $AD: x+3y-7=0$

Điểm E huộc DC mà dễ thấy E thuộc đường thẳng $AC: x-2y+3=0$

Suy ra $C(9;6) \Rightarrow CD: 3x-y-21=0 \Rightarrow D(7;0)$

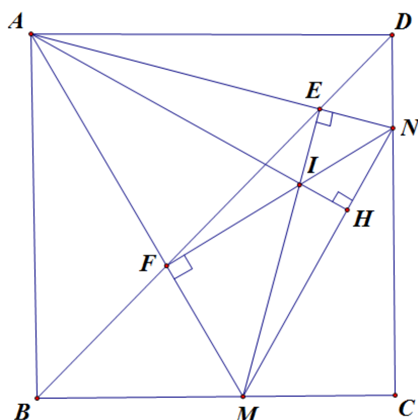
AC cắt AD tại A nên $A(1;2)$

Do $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B(3;8)$

Vậy $A(1;2), B(3;8), C(9;6), D(7;0)$



Câu 13 – Đề 19 (Nhóm Học Sinh Thầy Quang Baby) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(4;6)$. Goi M,N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0, N(-5;8)$ và đường thẳng MN có phương trình $38x+y+182=0$. Tìm tọa độ các điểm B,C,D



Gọi $E=BD\cap AN, F=BD\cap AM, I=ME\cap NF$.

Ta có $\widehat{MAN}=\widehat{NDB}=\widehat{MBD}=45^0$ nên hai tứ giác $ADNF, ABNE$ nội tiếp.

Do đó $ME\perp AN, NF\perp AM \Rightarrow I$ **là trực tâm** $\Delta AMN \Rightarrow AI\perp MN$.

Gọi $H=AI\cap MN$. Ta có $ABME, MNEF$ là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AND}=\widehat{AFD}=\widehat{ANH}$

$\Rightarrow \Delta AND=\Delta ANH$. Do đó D là điểm đối xứng của H qua đường thẳng AN.

Từ $AH\perp MN\equiv H \Rightarrow H\left(-\frac{84}{17};\frac{98}{17}\right)$. Do D là điểm đối xứng của H qua đường thẳng AN.

nên ta tìm được $D(-4;10)$.

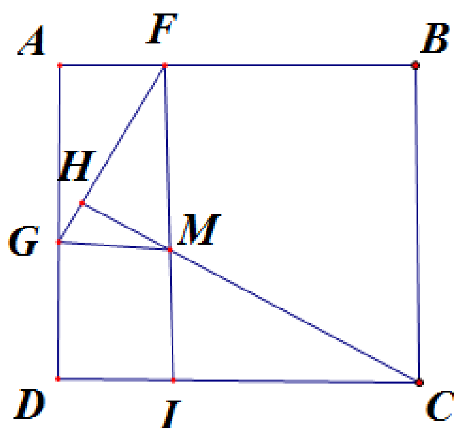
Ta có $AD=DC=4\sqrt{5}; DN=\sqrt{5} \Rightarrow \overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{DN} \Rightarrow C(-8;2)$. Từ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow B(0;-2)$

Bài 14: Bonuos



Mặt phẳng Oxy hình vuông ABCD có đỉnh C thuộc đường thẳng: x+2y-6=0. Điểm A(1;1) thuộc cảnh BD. Biết hình chiếu của M lên AB và AD điều thuộc đường thẳng: x+y-1=0. Tìm C.

Hình vẽ:



$\triangle FGM = \triangle CMI\,(c-c-c)$

$\Rightarrow \widehat{HFM} = \widehat{MCI}$

Ta lại có : $\widehat{HMF} = \widehat{IMC}$

$\Rightarrow \triangle MHF \backsim \triangle MIC$

$\Rightarrow MC \perp FG$ suy ra C(2;2)

Bài 15 : Bonuos

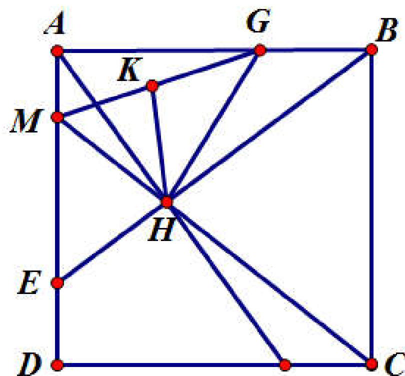
Cho hình vuông ABCD, hai điểm E và F lần lượt thuộc AD và AB sao cho AE = AF

Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BE<CH cắt AD tại M,

Tìm tọa độ các điểm của hình vuông biết F(2;0), C thuộc d: x-2y+1=0 và $M\left(\frac{7}{3};\frac{-7}{3}\right)$

Hình vẽ:





$\triangle AEH \sim \triangle BAH \Rightarrow \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{BH}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{AH}{FA} = \dfrac{BH}{BC}$

$\Rightarrow \triangle AHF \sim \triangle BHC(c-g-c) \Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{BHC}$

$\Rightarrow \widehat{FHC} = 90^0$

$\begin{cases} \widehat{HAF} = \widehat{HMF} \\ \widehat{HCF} = \widehat{HBF} \\ \widehat{HAF} = \widehat{HBF} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{MFC} = 90^0 \Rightarrow MF \perp FC$

Lại có $\begin{cases} \widehat{AFH} = \widehat{HBC}(2.goc.tuong.ung) \\ \widehat{AFH} = \widehat{HCB}(ke.bu\,\widehat{HFB}) \end{cases}$

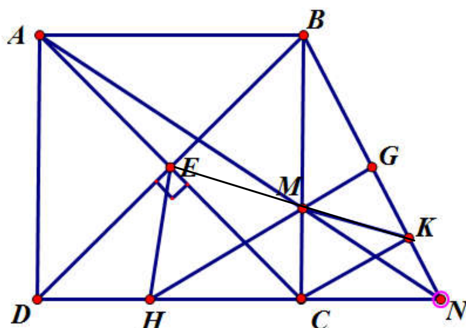
$\Rightarrow \triangle HBC$ cân tại H

Bài 16: Bonuos

Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho hình vuông ABCD tâm E, một đường thẳng qua A cắt BC và CD lần lượt tại M và N, coi K là giao điểm giữa EM và BN, xác định tọa độ của hinh vuông biết tọa độ của đỉnh C(14;2) phương trình đường thẳng EK: x-y-4=0, và điểm B thuộc đường thẳng d: 2x-y-10=0 và có hoành độ lớn hơn hoành độ điểm K.

Hình vẽ:





Kẻ thêm EH vuông với MK và HM cắt BN tại G,

$\widehat{BEK} = \widehat{HEC}$ (cung phụ $\widehat{CEM}$) $\Rightarrow \triangle BEM = \triangle CEH$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAM} = \widehat{CBH} \\ \widehat{BAM} + \widehat{BMA} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow BH \perp AM \quad (1)$

Xét $\triangle BHN : \begin{cases} BH \perp AM \\ BC \perp HN \end{cases} \Rightarrow MH \perp BN$

$\triangle BMG \sim \triangle HMC \Rightarrow \widehat{GBM} = \widehat{MHC}$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{GBM} = \widehat{MHC} \\ \widehat{MHC} = \widehat{CEM} \end{cases} \Rightarrow \widehat{GBM} = \widehat{CEM}$

$\Rightarrow CK \perp BK$

$\widehat{ECB} = \widehat{MKB} = 45^0 \Rightarrow$ KE phân giác góc BKC.

Bài 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm E(7;3) là một điểm nằm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường chéo BD tại điểm $N(N \neq B)$. Đường thẳng AN có phương trình 7x +11y + 3 = 0 . Tìm tọa độ các đỉnhA, B, C,D của hình vuông ABCD , biết A có tung độ dương, C có tọa độ nguyên và nằm trên đường thẳng $2x - y - 23 = 0$.

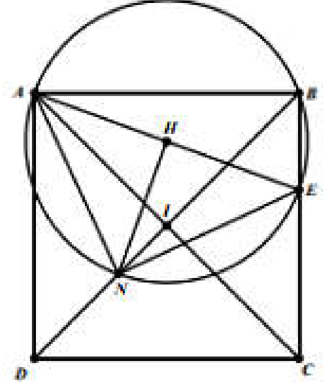
(Đề thi thử THPT Hàn Thuyên Bắc Ninh 2016 Lần 1)

Giải



Tứ giác ABEN nội tiếp đường tròn đường kính $AE \Rightarrow ANE = 90^0 \Rightarrow AN \perp NE$

$\Rightarrow NE: 11(x-7) - 7(y-3) = 0 \Leftrightarrow 11x - 7y - 56 = 0$



Tọa độ của N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 11x - 7y - 56 = 0 \\ 7x + 11y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$

Gọi H là trung điểm của AE, có: $NBE = 45^0 \Rightarrow NHE = 90^0 \Rightarrow AN = NE$

Gọi $A\left(a; -\dfrac{7a+3}{11}\right)$. Ta có $AN^2 = NE^2 \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{49-14a}{22}\right)^2 = \dfrac{85}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 9(l) \\ a = -2 \end{array}\right. \Rightarrow A(-2;1)$

Gọi $C(c; 2c-23) \Rightarrow$ trung điểm I của $AC: I\left(\dfrac{c-2}{2}; c-11\right) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = \left(-\dfrac{c+2}{2}; 12-c\right)$

$\overrightarrow{IN} = \left(\dfrac{9-c}{2}; \dfrac{17}{2} - c\right)$

Ta có $AIN = 90^0 \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IN} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 10 \\ c = \dfrac{39}{5}(l) \end{array}\right. \Rightarrow C(10;-3); I(4;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EC} = (3;-6) \Rightarrow BC: 2(x-7) + (y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 17 = 0$

$\overrightarrow{IN} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow BD: 3(x-4) - (y+1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 13 = 0$

Tọa độ điểm $B: \begin{cases} 3x - y - 13 = 0 \\ 2x + y - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(6;5), D(2;-7)$

Câu 18. **(Đề 22 – thầy Quang Baby) :**

Cho hình vuông ABCD, A(1;4), vẽ hai đường tròn (C_1) có đường kính AD và (C_2) có bán kính AD tâm D. Lấy điểm P nằm trên đường tròn (C_2), AP có phương trình x + y – 5 = 0. Đường thẳng DP cắt đường tròn (C_1) tại N, AN có phương trình 3x – 5y + 17 = 0. Tìm các đỉnh hình vuông biết rằng $x_C > 0$, điểm E(7; -2) thuộc đường thẳng BC.



Đáp án

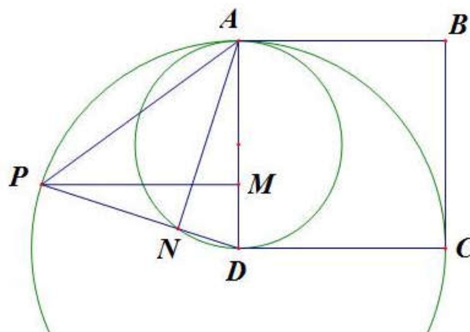
+) Gọi $\vec{n}$ =(a;b) là vecto pháp tuyến của AB

Ta có $\overrightarrow{u_1}$ =(1;1) là vecto pháp tuyến của AP

$\overrightarrow{u_2}$ = (3;-5) là vecto pháp tuyến của AN

Ta sẽ chứng minh cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)$=cos$\left(\overrightarrow{u_1};\vec{n}\right)$

*) Trường hợp 1: Điểm P nằm ngoài hình vuông ABCD:



+) Vì N∈(C_1) có đường kính AD nên $\widehat{AND} = 90^o$ hay AN⊥ DP

Vì A,P∈ (C_2) nên DA = DP

→ ΔDAP cân tại D

Từ P kẻ PM ⊥ AD tại M. Dễ thấy PM // AB → $\vec{n}$ =(a;b) cũng là vecto pháp tuyến của PM

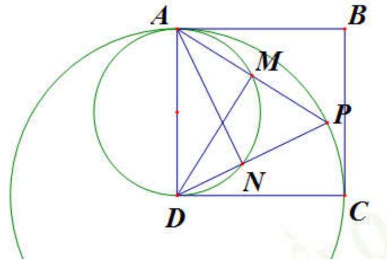
Ta có: $\widehat{DAP} = \widehat{DPA}$ do ΔDAP cân tại D

→ $\widehat{NAP} = \widehat{MPA}$

Do đó cos $\widehat{NAP}$ = cos $\widehat{MPA}$ ⇔ cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)$=cos$\left(\overrightarrow{u_1};\vec{n}\right)$ (đúng)

*) Trường hợp 2: P nằm bên trong hình vuông ABCD:





Gọi M là giao điểm của AP với đường tròn (C_1) $\rightarrow$ AM $\perp$ MD

Vì A,P cùng nằm trên đường tròn (C_2) nên DA=DP

Do đó tam giác DAP cân tại D

$\rightarrow$ Đường cao DM đồng thời là phân giác

$\rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

$\rightarrow \widehat{PAN} = \widehat{BAP}$

Nên cos $\widehat{PAN}$ = cos $\widehat{BAP}$ $\Leftrightarrow$ $\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right) = \cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{n}\right)$

***Vậy ta có $\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right) = \cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{|3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{34}.|a+b|$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2) = 34(a^2+2ab+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 30a^2+68ab+30b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a=-5b \\ 5a=-3b \end{array}\right.$$

-) Nếu 5a = -3b . Lấy a = 3 ; b = -5 $\rightarrow$ loại vì khi đó AB // AN

-) Nếu 3a = -5b . Lấy a = 5 ; b = -3

$\rightarrow$ phương trình AD đi qua A(1;4) nhận (3;5) là một vecto pháp tuyến là

3x + 5y - 23 = 0



Phương trình đường thẳng AB là: 5x – 3y +7 = 0

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm E(-7;2) là: 3x + 5y + 11 = 0

Do đó tọa độ của B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 5x - 3y + 7 = 0 \\ 3x + 5y + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{B(-2; -1)} \quad \rightarrow \text{AB=} \sqrt{34}$$

Vì C∈BC $\rightarrow$ C$\left(c;\frac{-3c-11}{5}\right)$. (c>0)

Lại có BC=AB= $\sqrt{34}$

$$\rightarrow (c+2)^2 + \left(\frac{-3c-6}{5}\right)^2 = 34$$

$$\rightarrow \frac{34}{25}c^2 + \frac{136}{25}c - \frac{714}{25} = 0$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 3 \\ c = -7 \end{array}\right. \rightarrow \text{c=3 (vì c>0)}$$

Do đó C(3;-4)

+) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow$ D(6;1)

Kết luận: Vậy tọa độ 4 đỉnh của hình vuông ABCD là A(1;4) B(-2;-1) C(3;-4) D(6;1)

Bài 19: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho AE = AF. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên DE. Biết $H\left(\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $F\left(\frac{8}{3};-2\right)$, C thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0$, D thuộc đường thẳng $d': x-3y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(Đề thi thử THPT Thuận Thành 1 Bắc Ninh 2016 Lần 2)

Giải



Gọi M là giao điểm của AH và BC.

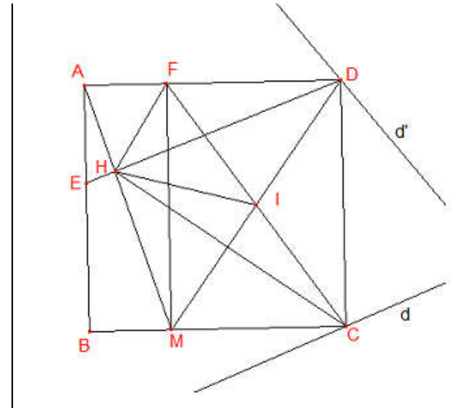
Hai tam giác ADE và BAM bằng nhau nên BM = AE = AF.

Suy ra các tứ giác ABMF, DCMF là các hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của FC và MD.

Ta có $HI=\frac{1}{2}MD=\frac{1}{2}FC$ nên tam giác HFC vuông tại H.

Giả sử $C(c;2-c)$. $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HF}=0\Rightarrow C(-2;4)$



Giả sử $D(3m-2;m)$. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DF}=0\Rightarrow D(4;2)$

PT đường thẳng $AD:3x-y-10=0$

Giả sử $A(a;3a-10)$

$$DA=DC\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(6;8)\\A(2;-4)\end{array}\right.$$

Vì $\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DA}$ cùng hướng nên $A(2;-4)$

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\Rightarrow B(-4;-2)$$

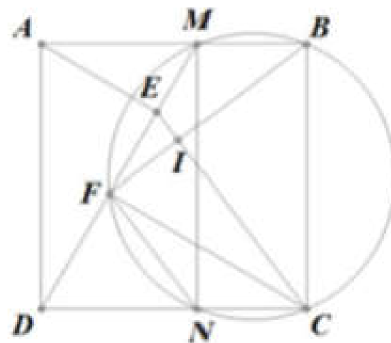
Vậy $A(2;-4),B(-4;-2),C(-2;4),D(4;2)$

Bài 20 Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $C(-4;-3)$ và M là một điểm nằm trên cạnh AB (M không trùng với A và B). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, C lên DM và $I(2;3)$ là giao điểm của CE và BF. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng d có phương trình $x-2y+10=0$

(Đề thi thử THPT Yên Thế 2016 Lần 3)

Đáp án: +) Qua F kẻ FN song song với EC, cắt DC tại N. Khi đó ta có: $\frac{DN}{DC}=\frac{DF}{DE}(1)$

$$\Delta DFC\sim\Delta MEA\Rightarrow\frac{DF}{DC}=\frac{ME}{MA}\ (2)$$



$\Delta DEA \sim \Delta AEM \Rightarrow \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{MA}{AE}\,(3)$

$\overset{(3),(2)}{\Rightarrow} \dfrac{DF}{DE} = \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AM}{AB} \quad (4)$

$\overset{(1),(4)}{\Rightarrow} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DN}{DC} \Rightarrow DN = MA$

Khi đó MBCN là hcn nên 5 điểm F, M, B, C, N cùng….

$\begin{cases} BFN = 90^0 \\ FN // EC \end{cases} \Rightarrow EC \perp BF$

Giải hệ $\begin{cases} B \in d \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;5)$

Phương trình $BC: 2x - y + 5 = 0$

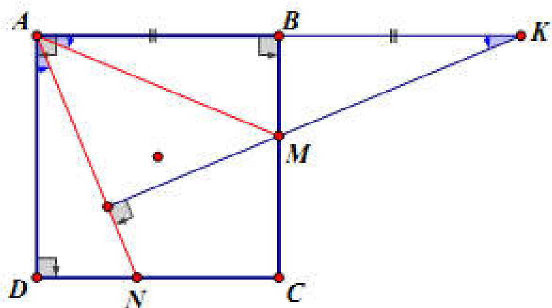
Tìm A, D

Kết luận: $A(8;1), B(0;5), \mathrm{D}(4;-7)$

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có K là điểm đối xứng với A qua B. Trên cạnh BC, CD lấy các điểm M và N thỏa mãn $BM = DN$. Phương trình đường thẳng $MK: x - y = 0$, điểm $N(-1;-5)$. Viết phương trình cạnh AB biết điểm A thuộc trục hoành và điểm M có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Offine Thầy Nguyễn Đại Dương sienghoc.com Lần 7)

Đáp án:



Chứng minh $MK \perp AN$

Ta có: $\Delta ADN = \Delta ABM = \Delta KBM \Rightarrow \angle MKB = \angle NAD$

$\Rightarrow \angle MKA + \angle NAK = \angle NAD + \angle NAK = 90^0 \Rightarrow MK \perp AN$

Phương trình AN: $x + y + 6 = 0$. Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x + y + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-6;0)$

Gọi $M(m,m) \in MK : AN = AM \Rightarrow M(1;1)$

Gọi $K(t,t) \in MK : \text{MA} = \text{MK} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} K(6;6) \\ K(-4;-4) \end{array} \right.$. Do K và M nằm cùng phía so với AN

$\Rightarrow K(6;6)$

Phương trình đường thẳng AB: $x - 2y + 6 = 0$

Bài 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD . Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB, CD thỏa mãn $AM = DN$. Đường thẳng qua M và vuông góc BN cắt cạnh AC tại E. Biết $E(-10;3)$, phương trình $MN : x - 2y + 1 = 0$, điểm C thuộc $d : 3x - y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

(Đề thi thử THPT Offine Thầy Nguyễn Đại Dương sienghoc.com Lần 8)

Đáp án: Viết phương trình đường thẳng AB.

$EC \Rightarrow C(2;-1), I(-1;0)$

Chứng minh $ME = MC, IC = AE$

$\Rightarrow \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IC} \Rightarrow A(-7;2)$

Phương trình trung trực EC: $3x - y + 13 = 0$

Tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - y + 13 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-5;1)$

Phương trình đường thẳng AB qua A, M: $2x + y + 12 = 0$

Ta có: $\angle AME = \angle HMB; \angle HMB = \angle HNM$ (cùng phụ $\angle MBN$)

E
A
D
M
I
N
H
B
C



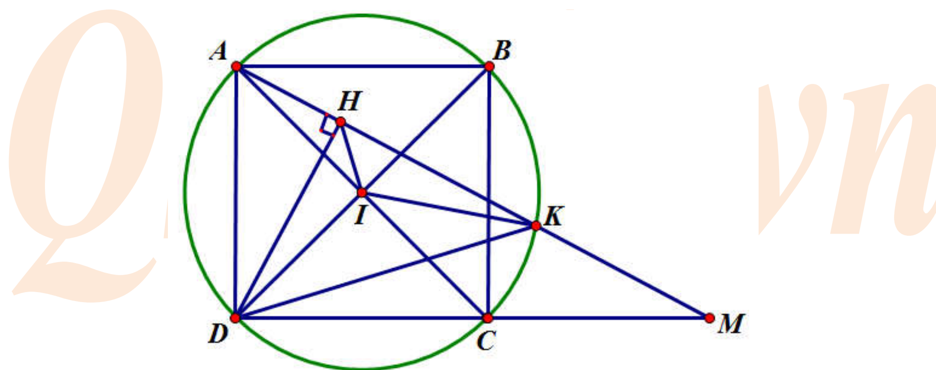
Mà $\angle HMN = \angle CMI$ (MBCN là hcn) $\Rightarrow \angle AME = \angle IMC$

Lại có: ΔAMI vuông cân tại M nên $\begin{cases} MA = MI \\ \angle MAE = \angle MIC = 135^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta MIC\left(g.c.g\right) \Rightarrow \begin{cases} ME = MC \\ AE = IC \end{cases}$

Bài 24: Cho hình vuông ABCD có tâm I. gọi M là điểm đối xứng của D qua C. Gọi H,K lần lượt là chân đường cao hạ từ D, C lên AM. Giả sử K(1;1), đỉnh B thuộc đt: 5x+3y-10=0 và pt đt HI: 3x+y+1=0. Tìm đọa độ đỉnh B.

Hình vẽ:



có ngũ giác ABKCD thuộc 1 đường tròn tâm I, đường kính AC

$\Rightarrow \widehat{BKD} = 90^0 \Rightarrow BK \perp DK$ (1)

$\Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{ABD} = 45^0 \Rightarrow \Delta HDK$ vuông cân tại H

$\begin{cases} HD = HK \\ ID = IK \end{cases} \Rightarrow HI \perp DK$ (2)

Từ (1) và (2) => HI//BK

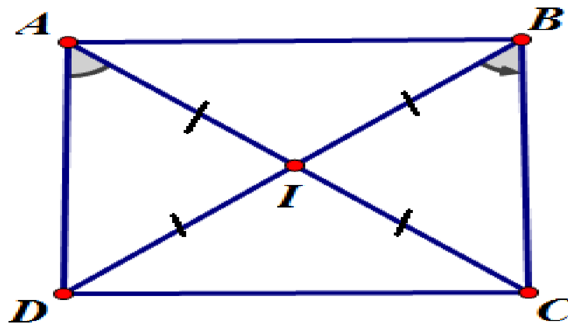
⇨ BK: x + y – 4 = 0



$$B:\begin{cases}3x+y-4=0\\5x+3y-10=0\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

HÌNH OXY : HÌNH CHỮ NHẬT

Lý thuyết :



Hình CN có tính chất :

$1) AB = CD; BC = AD$

$2) IA = IB = IC = ID$

$3) \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^O$

$$4)\begin{cases}\widehat{DAC}=\widehat{DBC}=\widehat{ACB}=\widehat{ADB}\\\widehat{DCA}=\widehat{DBA}=\widehat{CAB}=\widehat{BDC}\end{cases}$$

$5) AC = BD$



ĐỀ BÀI

Câu 1: Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2AB$. Điểm $H\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$ là điểm đối xứng của điểm B qua đường chéo AC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết phương trình $CD: x - y - 10 = 0$ và đỉnh C có tung độ âm.

ĐS : A(2;4) B-1;1) C(5;-5) D(8;-2)

Câu2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình : $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết phương trình đường thẳng CN là $3x - 4y - 17 = 0$; đường thẳng BC đi qua điểm $E(7;0)$ và điểm M có tung độ âm.

Đs $A(-1;5), B(7;5), C(7;1), D(1;1)$.

Câu 3 **(THPT – Quỳnh Lưu 3 – Nghệ An – Lần 1)**Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD; E, F lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết $A(1;1)$, phương trình đường thẳng EF là : $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

ĐS $B(1;5), C(5;-1), D(1;-1)$.

Câu 4(Sở GD – Bắc Ninh – Lần 3 – 2015) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ*Oxy*, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = AD\sqrt{2}$, tâm $I(1;-2)$. Gọi M là trung điểm cạnh CD, $H(2;-1)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BM. Tìm tọa độ các điểm A, B.

- ĐS $A(-2;-5)$, $B\left(2+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$ hoặc $B\left(2-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$.



Câu 5 : (THPT - Đội Cấn – Vĩnh Phúc – Lần 1 – 2016) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(1;5)$, $AB = 2BC$ và điểm C thuộc đường thẳng $d: x + 3y + 7 = 0$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB, N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ các điểm B và C biết $N\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và điểm B có tung độ nguyên.

- ĐS $B(5;1), C(2;-3)$.

Câu 6 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x - 4y - 17 = 0$; đường thẳng BC đi qua điểm $E(7;0)$ và điểm M có tung độ âm.

$A(-1;5)$ B(7;5) C(7;1) D(-1; 1)

Câu 7 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh B thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 10$, đỉnh C thuộc đường thẳng $x + 2y - 1 = 0$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của B lên AC. Biết rằng các điểm $N\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right), P(1;1)$ lần lượt là trung điểm của AM, CD đồng thời B có hoành độ dương, C có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

ĐS $A(-3;1), B(1;-3), C(3;-1), D(-1;3)$

Câu 8. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2bc. Gọi H là hình chiếu của A lên BD, điểm E,F là trung điểm của CD và BH. Biết A(1;1), EF có phương trình 3x – y – 10 = 0 và điểm E có tung độ âm, tìm tọa độ B,C,D

$B(5;1), C(5;-1), D(1;-1)$,

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo, E là điểm đối xứng của D qua C. Biết rằng M$\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ nằm trên đường thẳng



BC, điểm I$\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và phương trình đường thẳng AE là x=1. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

ĐS $\left[\begin{array}{l} A(1;0), B(0;1).C(2;3), D(3;0) \\ A(1;3), B(0;2), C(2;0), D(3;1) \end{array}\right.$. Thử lại ta thấy cả hai trường hợp đều thỏa mãn.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (T). Biết G$\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Gọi E(0;2) là giao điểm thứ hai của CG với đường tròn (T) và đường tròn (T) đi qua điểm F(2;-4). Tìm tọa độ các điểm của hình chữ nhật ABCD biết B có hoành độ dương.

$A(-1;0)$. $B(5;2)$. $C(6;-1)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD có D(4;5). Điểm M là trung điểm của AD, đường thẳng CM có phương trình x – 8y +10 = 0. Điểm B thuộc đường thẳng 2x + y +1 = 0. Tìm các tọa độ đỉnh A,B,C biết rằng C có tung độ nhỏ hơn 2.

$A(8;-1)$. $B(2;-5)$. $C(-2;1)$.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD có tâm I(-1;2). Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm M(-1;5). Đường thẳng CD đi qua điểm N(2;3). Viết phương trình đường thẳng BC.

BC là $\left[\begin{array}{l} 3x+4y-23=0 \\ 3x+4y+13=0 \end{array}\right.$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng $2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD biết điểm M(0;1), đường thẳng AN có phương trình $2\sqrt{2}$ x + y – 4 = 0. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD biết AB = 2BC.



Đường thẳng AB đi qua điểm $M\left(\frac{-4}{3};1\right)$. Đường thẳng BC đi qua điểm N(0;3), đường thẳng AD đi qua điểm P(4;3) và điểm Q(7;4) nằm trên đường thẳng CD. Viết phương trình các cạnh hình chữ nhật.

Bài 15 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB, AD tiếp xúc với đường tròn (C) có phương trình $(x+2)^2+(y-3)^2=4$. Phương trình đường chéo $AC: x+2y-6=0$. Chứng minh đường tròn (C) tiếp xúc với trục tung. Gọi N là tiếp điểm của (C) và trục tung. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết A có hoành độ âm và điểm D có hoành độ dương, diện tích tam giác CND bằng 15

(Đề Thi Thử THPT Chuyên Thái Bình 2016 Lần 3)

Bài 17 : Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm F(3,3) sao cho $DF = DC$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho DE = AF . Biết điểm I(11/2,-1/2) là tâm hình chữ nhật ABCD . Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật ABCD . Biết phương trình đường thẳng BE : 3x – 7y – 17 = 0 .

Bài 18 : Cho hình chữ nhật ABCD , Trên tia đối của tia AD lấy điểm sao cho DF = DC . Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho DE = AF . Biết điểm I(0,5) là tâm hình chữ nhật ABCD, A(-3,6) , B(1,2) . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác EFB.

Bài 19 : Cho hình chữ nhật ABCD ,Điểm B thuộc đường thẳng $2x-y+2=0$ Kẻ đường BH vuông góc AC (H thuộc AC) ,C thuộc đường : $x-y-5=0$. K(9,2) là trung điểm của BC , M(9/5,2/5) là trung điểm AH . Tìm các đỉnh hình chữ nhật ABCD .



Bài 20: Cho Hình chữ nhật ABCD , cos(góc ACD) $=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, H\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$ thuộc BC, $HB=2HC$. Gọi K(1,0) là giao điểm của AH với BD . Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật .

Bài 21 : (Khai thác yếu tố vuông góc) Cho hình chữ nhật ABCD , B(1,2) , M thuộc BC , CK vuông góc AM tại $K(-3;-1)$, điểm D thuộc $(d): x-3y+7=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác CDK .

Bài 22 : Cho tam giác ABC cân tại A, phương trình đường thẳng $AB: x-3y+5=0, AC=\sqrt{10}$ cho D thuộc BC , kẻ Dx vuông góc BC . Đường thẳng Dx giao AB và AC tại E ,F . Dựng 2 hình chữ nhật BDEQ , DCHF. Cho điểm $Q\left(\frac{2}{5};\frac{29}{5}\right)$, H thuộc đường thẳng: $9x+8y=0$. Tìm các đỉnh A,B,C. Biết $x_B<0$

Bài 23 : Cho hình chữ nhật ABCD , BK vuông góc AC tại K , $E(-2;3)$ thuộc tia đối của tia BK sao cho BE = BD . Qua E kẻ đường thẳng Ex song song với AB. Đường Ex cắt AD tại F , cắt BC tại H. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF . Biết F thuộc $(d): x-2y+1=0$, EF vuông góc với đường thẳng $(d'): 3x-2y+10=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Bài 24 : Trong Oxy. Cho hình chữ nhật ABCD có AD=2AB . Cho $H\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$ là điểm đối xứng của B qua AC . Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.biết C có tung độ âm. Pt $CD: x-y-10=0$

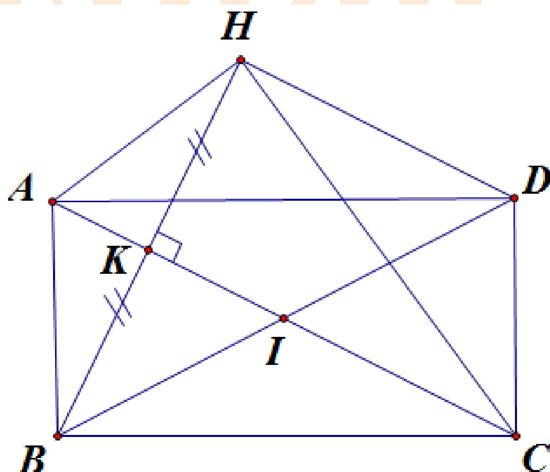


Bài 25: Trong mặt phẳng OXY , cho hình chữ nhật ABCD , Có AB = 2BC . Điểm B(7,3). Gọi M là trung điểm của AB , E là điểm đối xứng với D qua A , Biết rằng N(2,-2) là trung điểm của DM , Điểm E thuộc đường $(d'): 2x-y+9=0$. Tìm tọa độ của D.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=2AB$. Điểm $H\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$ là điểm đối xứng của điểm B qua đường chéo AC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết phương trình $CD: x-y-10=0$ và đỉnh C có tung độ âm.

Bài giải



+) Ta có: B đối xứng H qua AC mà $AB\perp BC \Rightarrow HA\perp BC$

$\Rightarrow \square ABCH$ nội tiếp đường tròn tâm I bán kính IA.

$\Rightarrow HI=IB=ID \Rightarrow BH\perp HD$

Mà $HC=BC, AB=AH \Rightarrow \cos\widehat{BCA}=\cos\widehat{ACH}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\widehat{HCD}=\frac{4}{5}$



+) Gọi $\overrightarrow{n}=(a;b)$ là VTPT của đường thẳng HC.

$$\cos\widehat{HCD}=\cos\left(\widehat{HC,CD}\right)=\frac{4}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}7a=-b\\a=-7b\end{array}\right.$$

- Với $7a=-b\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng : $HC:x-7y+\frac{88}{5}=0.$

$HC\cap CD\equiv C\Rightarrow C\left(-\frac{73}{5};\frac{23}{5}\right)$ (Loại vì $y_C<0$)

- Với $a=-7b\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $HC:7x-y-40=0.$

$HC\cap CD\equiv C\Rightarrow C(5;-5)$

+) Phương trình đường thẳng $BC:x+y=0.$

$HB=BC\Rightarrow B(-1;1)$ (Chọn) hoặc $B(11;-11)$ (Loại vì ngược phía H so với CD)

$\Rightarrow B(-1;1)\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $HD:3x+y-22=0.$

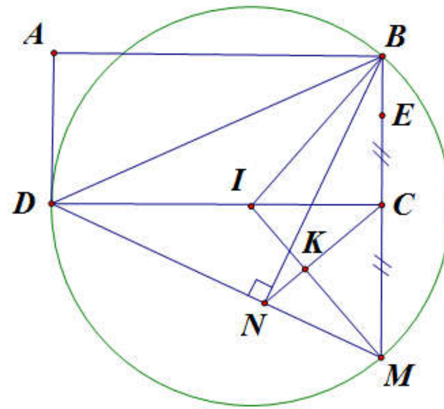
$\Rightarrow D(8;-2)\Rightarrow A(2;4).$

Vậy A(2;4) B-1;1) C(5;-5) D(8;-2)

Câu2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $:(x-4)^2+(y-1)^2=25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết phương trình đường thẳng CN là $3x-4y-17=0$; đường thẳng BC đi qua điểm $E(7;0)$ và điểm M có tung độ âm.

Bài giải





+) I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BDM \Rightarrow I \in DC$

$\widehat{BND} = \widehat{BCD} = 90^0 \Rightarrow \square BDNC$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{DBN} = \widehat{DCN}$ (Chắn cung $\overset{\frown}{DN}$)

Lại có $\widehat{BDN} = \frac{1}{2}\widehat{BIM} = \widehat{CIM}$

Mà $\widehat{BDN} + \widehat{DBN} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CIM} + \widehat{DCN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IHC} = 90^0 \Rightarrow IM \perp NC$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $IM : 4x + 3y - 19 = 0.$

+) $IM \cap (C) \Rightarrow M(7;-3)$ (Chọn) hoặc $M(1;5)$ (Loại vì $y_M < 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BC : x = 7.$

$\Rightarrow BC \cap CN \equiv C \Rightarrow C(7;1) \Rightarrow B(7;5)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $CD : y = 1.$

$CD \cap (C) \equiv D \Rightarrow D(-1;1)$ (Chọn) hoặc $D(9;1)$ (Loại vì khác phía I so với BC)

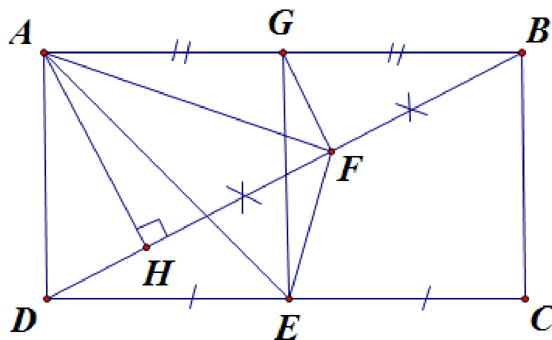
$\Rightarrow D(1;1) \Rightarrow A(-1;5)$

• Vậy : $A(-1;5), B(7;5), C(7;1), D(1;1).$



Câu 3 (THPT – Quỳnh Lưu 3 – Nghệ An – Lần 1)Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng $BD; E, F$ lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết $A(1;1)$, phương trình đường thẳng EF là : $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Bài giải



+) Gọi G là trung điểm đoạn thẳng AB. Ta chứng minh $AF \perp EF$.

Ta thấy □$ADEG$ và □$ADFG$ nội tiếp nên □$ADEF$ cũng nội tiếp, do đó $AF \perp EF$.

Đường thẳng AF có phương trình $: x + 3y - 4 = 0$. Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases} \to F\left(\dfrac{17}{5}; \dfrac{1}{5}\right) \to AF = \sqrt{\dfrac{32}{5}}$

$\Delta AFE \backsim \Delta DCB \to EF = \dfrac{1}{2} AF = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}};$

$E(t; 3t - 10) \to EF^2 = \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow \left(t - \dfrac{17}{5}\right)^2 + \left(3t - \dfrac{51}{5}\right)^2 = \dfrac{8}{5}$

$\Leftrightarrow 5t^2 - 34t + 57 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = \dfrac{19}{5}$ hay $E(3; -1) \vee E\left(\dfrac{19}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$



Theo giả thiết ta được $E(3;-1)$, phương trình đường thẳng $AE: x+y-2=0$. Gọi $D(x;y)$ ΔADE vuông cân tại D

nên: $\begin{cases} AD = DE \\ AD \perp DE \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+1)^2 \\ (x-1)(x-3)=(y-1)(y+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2 \\ (x-1)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ hay D(1;-1) $\vee$ D(3;1)

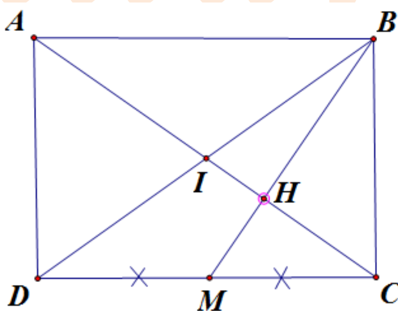
Vì D và F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên $D(1;-1)$.

Khi đó $C(5;-1), B(1;5)$.

- Vậy $B(1;5), C(5;-1), D(1;-1)$.

Câu 4(Sở GD – Bắc Ninh – Lần 3 – 2015) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = AD\sqrt{2}$, tâm $I(1;-2)$. Gọi M là trung điểm cạnh CD, $H(2;-1)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BM. Tìm tọa độ các điểm A, B.

Bài giải



+) Theo giả thiết ta có H là trọng tâm của $\Delta BCD \Rightarrow \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IH}$

Mà $\overrightarrow{IH} = (1;1)$, giả sử $C(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x-1=3.1 \\ y+2=3.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(4;1)$

Do I là trung điểm AC nên $A(-2;-5)$

Lại có $AB = \sqrt{2}AD \Rightarrow \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{BAC}$



Mà $\widehat{BAC}+\widehat{BCA}=90^0 \Rightarrow \widehat{MBC}+\widehat{BCA}=90^0 \Rightarrow AC \perp BM$

+) Đường thẳng BM đi qua $H(2;-1)$, có VTPT $\overrightarrow{IH}=(1;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BM: x+y-1=0 \Rightarrow B(t;1-t)$

+) Ta có $\overrightarrow{AB}=(t+2;6-t)$; $\overrightarrow{CB}=(t-4;-t)$

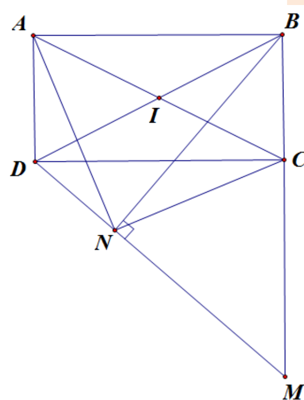
Vì $AB \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow (t+2)(t-4)-t(6-t)=0 \Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow B\left(2+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$ hoặc $B\left(2-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$

- Vậy $A(-2;-5)$, $B\left(2+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$ hoặc $B\left(2-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 5 : (THPT - Đội Cấn – Vĩnh Phúc – Lần 1 – 2016) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(1;5)$, $AB=2BC$ và điểm C thuộc đường thẳng $d: x+3y+7=0$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB, N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ các điểm B và C biết $N\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và điểm B có tung độ nguyên.

Bài giải



+) Gọi $AC \cap BD \equiv I$

Do $BN \perp DM \Rightarrow IN = IB = ID \Rightarrow IN = IA = IC \Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N.

+) Đường thẳng CN qua $N\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{NA}=\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$ là 1 VTPT



$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $CN: 7x+9y+13=0$. Do $CN \cap d \equiv C \Rightarrow C(2;-3)$.

+) Gọi $B(a;b)$, do $\begin{cases} AB=2BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên ta có hệ phương trình:

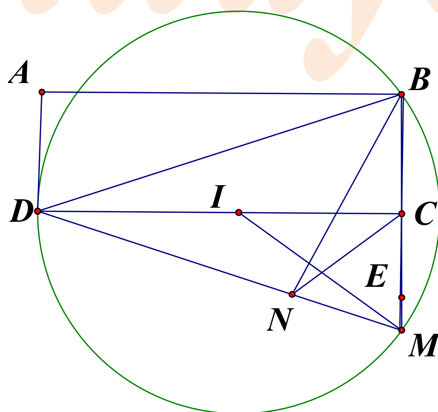
$$\begin{cases} (a-1)(a-2)+(b-5)(b+3)=0 \\ (a-1)^2+(b-5)^2=4\left[(a-2)^2+(b+3)^2\right] \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5; b=-1 \\ a=-\frac{7}{5}, b=-\frac{9}{5} \end{array}\right.$$

Vì B có tung độ nguyên nên $B(5;1) \Rightarrow C(2;-3)$.

- Vậy $B(5;1), C(2;-3)$.

Câu 6 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x-4)^2+(y-1)^2=25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x-4y-17=0$; đường thẳng BC đi qua điểm $E(7;0)$ và điểm M có tung độ âm.

Bài giải



+ (T) có tâm I(4;1); R = 5.

+ Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và N, C là chân các đường cao nên chứng minh được: IM $\perp$ CN

+ Lập ptđt IM qua I và IM $\perp$ CN: $4(x-4)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-19=0$



+ M là giao điểm (T) với IM: $\left[\begin{array}{l} M(7;-3) \\ M(1;5)\ (loai) \end{array}\right.$

+ Đường thẳng BC qua M, E có phương trình: $x=7$

+ C là giao điểm BC và N =>C(7;1)

+ B đối xứng M qua C =>B(7;5)

+ Đường thẳng DC qua C và vuông góc BC: y = 1

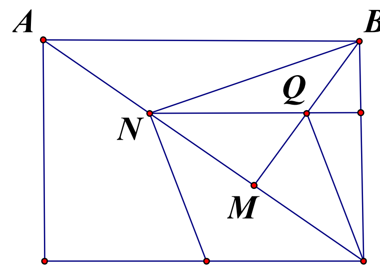
D là giao điểm (T) và $DC:\left[\begin{array}{l} D(9;1) \\ D(-1;1) \end{array}\right.$

Vì B, D nằm cùng phía với CN nên D(-1; 1)

+ Do $\overline{BA}=\overline{CD}\Rightarrow A(-1;5)$

Câu 7 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh B thuộc đường tròn $x^2+y^2=10$, đỉnh C thuộc đường thẳng $x+2y-1=0$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của B lên AC. Biết rằng các điểm $N\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right), P(1;1)$ lần lượt là trung điểm của AM, CD đồng thời B có hoành độ dương, C có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài giải



+) Gọi Q là trung điểm BM thì PCQN là hình bình hành nên NP//CQ, nên mặt khác Q là trực tâm trong tam giác BNC nên CQ ⊥ BN suy ra BN ⊥ NP.



Ta có $\overrightarrow{NP}=\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng BN nên phương trình đường thẳng BN là $\frac{8}{5}\left(x+\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{5}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+y+1=0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x^2+y^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1-2x\\5x^2+4x+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{-9}{5}\\y=\frac{13}{5}\end{cases}$$

Suy ra $B(1;-3)$ vì B có hoành độ dương.

+) Gọi $C(1-2c;c)$ ta có $\overrightarrow{CB}=(2c;-3-c),\overrightarrow{CP}=(2c;1-c)$ do CB ⊥ CP nên $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CB}=0$

$$\Rightarrow 4c^2-(3+c)(1-c)=0\Leftrightarrow 5c^2+2c-3=0\Leftrightarrow c=-1\vee c=\frac{3}{5}$$

do C có tung độ âm nên $C(3;-1)$

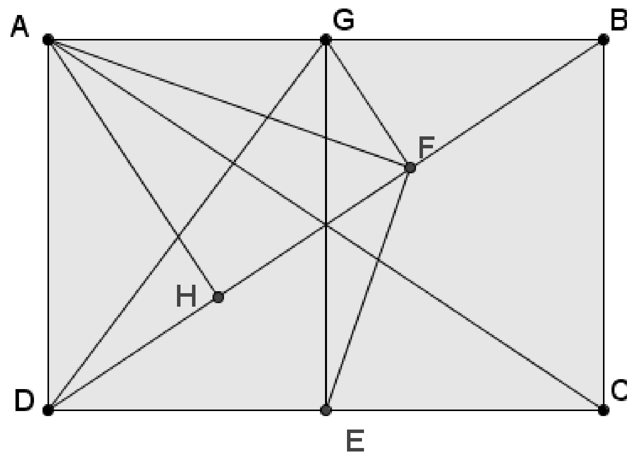
Suy ra $D(-1;3),A(-3;1)$

Vậy $A(-3;1),B(1;-3),C(3;-1),D(-1;3)$

Câu 8. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2bc. Gọi H là hình chiếu của A lên BD, điểm E,F là trung điểm của CD và BH. Biết A(1;1), EF có phương trình 3x – y – 10 = 0 và điểm E có tung độ âm, tìm tọa độ B,C,D

Bài giải





+) Gọi G là trung điểm AB suy ra $GF \perp BD(\| AH) \Rightarrow DGFE$ nội tiếp.

Mà ta lại có $AGED$ là tứ giác nội tiếp suy ra $AFED$ là tứ giác nội tiếp suy ra $AF \perp FE$.

Phương trình $AF: x+3y-4=0 \Rightarrow F\left(\frac{17}{5};\frac{1}{5}\right)$. Gọi cạnh $AD=a \Rightarrow AB=2a$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABD ta có $HB=\frac{AB^2}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\frac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow FB=\frac{2a}{\sqrt{5}};\cos\widehat{ABF}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lí hàm số cosin trong $\Delta ABF \Rightarrow AF=\frac{2\sqrt{10}}{5}a=\frac{4\sqrt{10}}{5} \Rightarrow a=2 \Rightarrow AE=2\sqrt{2}$.

+) Gọi $E(e;3a-10) \Rightarrow (e-1)^2+(3e-11)^2=8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} e=\frac{19}{5} \\ e=3 \end{array}\right. \Rightarrow e=3 \Rightarrow E(3;-1)$.

+) Gọi $FE \cap AB = M$. Áp dụng Thales ta có :

$\frac{MF}{FE}=\frac{BF}{FD}=\frac{BF}{BD-FD}=\frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{FM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EF} \Rightarrow M\left(\frac{11}{3};1\right) \Rightarrow AB: y-1=0, AD: x-1=0, DC: y+1=0$.

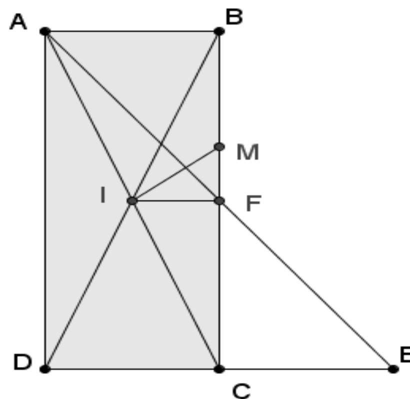
Suy ra $D(1;-1) \Rightarrow C(5;-1) \Rightarrow BC: x-5=0 \Rightarrow B(5;1)$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD. Gọi I là giao điểm của



hai đường chéo, E là điểm đối xứng của D qua C. Biết rằng M$\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ nằm trên đường thẳng BC, điểm I$\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và phương trình đường thẳng AE là x=1. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài giải



+) Gọi $A(1;a), F(1;f)$. Do I là tâm hình chữ nhật $\Rightarrow C(2;3-a)$. Theo Thales thì $\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{CE}=1$ suy ra F là trung điểm $BC \Rightarrow B(0;2f+a-3) \Rightarrow D(3;6-2f-a)$.

Có $\overrightarrow{BC}=(-2;2f+2a-6) \Rightarrow BC:(f+a-3)(x-2)+y-(2f+a-6)=0$.

Từ giả thiết $M \in BC \Rightarrow -\frac{5}{2}a-\frac{7}{2}f+12=0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow 2af-3a+2f^2-9f+8=0$.

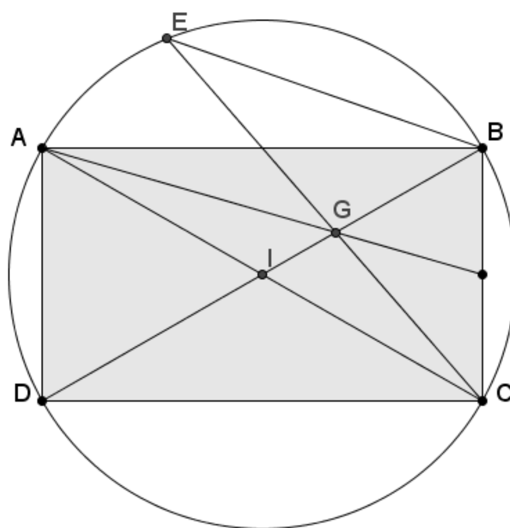
Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} a=0; f=2 \\ a=3; f=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;0), B(0;1).C(2;3), D(3;0) \\ A(1;3), B(0;2), C(2;0), D(3;1) \end{array}\right.$. Thử lại ta thấy cả hai trường hợp đều thỏa mãn.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (T). Biết G$\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Gọi E(0;2) là giao điểm thứ hai của CG với



đường tròn (T) và đường tròn (T) đi qua điểm F(2;-4). Tìm tọa độ các điểm của hình chữ nhật ABCD biết B có hoành độ dương.

Bài giải



+) Gọi $I(x;y)$ là tâm hình chữ nhật suy ra I là tâm của (T).

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IG}\Rightarrow B(10-2x;1-2y)$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases}IE=IF\\IE=IB\end{cases}$ suy ra

$\begin{cases}x^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y+4)^2\\x^2+(y-2)^2=(3x-10)^2+(3y-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2};y=-\frac{1}{2}\\x=\frac{41}{8};y=\frac{3}{8}\end{array}\right.$. Do B có hoành độ dương suy ra $B(5;2)$.

+) Có $I\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow D(0;-3)$. Phương trình đường tròn $(T):\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

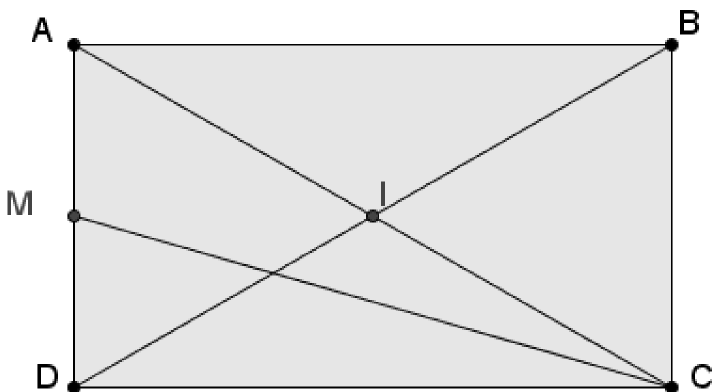
Phương trình $CG:x+2y-4=0$. Tọa độ C thỏa $\begin{cases}x+2y-4=0\\\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\end{cases}\Rightarrow C(6;-1)$.



Vì I là tâm hình chữ nhật suy ra $A(-1;0)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD có D(4;5). Điểm M là trung điểm của AD, đường thẳng CM có phương trình x – 8y +10 = 0. Điểm B thuộc đường thẳng 2x + y +1 = 0. Tìm các tọa độ đỉnh A,B,C biết rằng C có tung độ nhỏ hơn 2.

Bài giải



+) Gọi G là trọng tâm tam giác $ACD \Rightarrow DG = \frac{2}{3}ID = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{2}GB \Rightarrow \frac{d(D;CM)}{d(B;CM)} = \frac{1}{2}$.

+) Gọi $B(b;-2b-1) \Rightarrow \frac{|b-8(-2b-1)+10|}{\sqrt{65}} = 2.\frac{|4-5.8+10|}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-\frac{70}{17} \end{array}\right.$.

Do B,D khác phía với $CM \Rightarrow b=2 \Rightarrow B(2;-5)$. Gọi $C(8c-10;c) \Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}=0$ suy ra

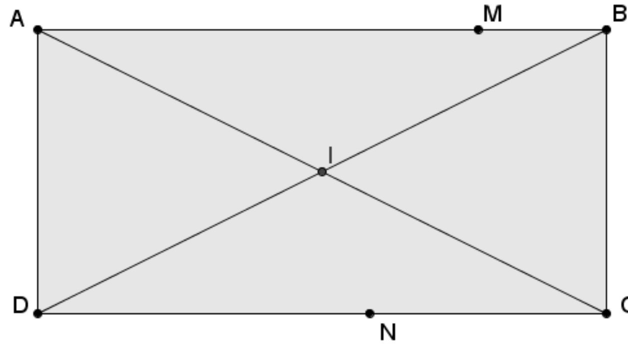
$(8c-12)(8c-14)+(c-5)(c+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=2,2 \end{array}\right. \Rightarrow c=1 \Rightarrow C(-2;1)$.

+) Gọi I là tâm hình chữ nhật suy ra $I(3;0) \Rightarrow A(8;-1)$.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD có tâm I(-1;2). Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm M(-1;5). Đường thẳng CD đi qua điểm N(2;3). Viết phương trình đường thẳng BC.



Bài giải



Gọi N' đối xứng N qua I suy ra $N'(-1;-1) \Rightarrow AB: 4x-3y+1=0$. Gọi $AD=\frac{AB}{2}=a.$

Có $d(I;AB)=\frac{9}{5}=\frac{AD}{2}=\frac{a}{2} \Rightarrow a=\frac{18}{5} \Rightarrow IB=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{9}{\sqrt{5}}.$

Phương trình đường tròn tâm I bán kính IB là $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{81}{5}.$

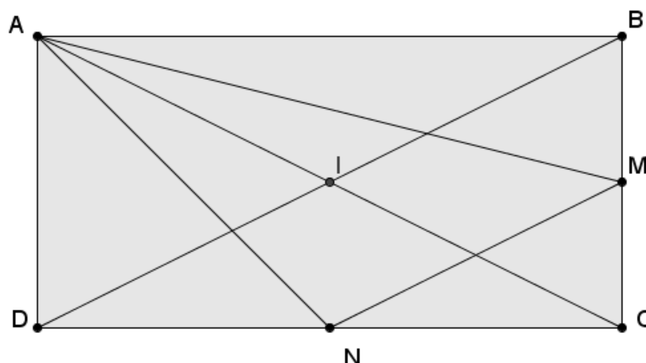
Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-3y+1=0 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=\frac{81}{5} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B\left(\frac{-43}{25};-\frac{49}{25}\right) \\ B\left(\frac{13}{5};\frac{19}{5}\right) \end{array}\right.$.

Phương trình đường thẳng BC qua B vuông góc AB là $\left[\begin{array}{l} 3x+4y-23=0 \\ 3x+4y+13=0 \end{array}\right.$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng $2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD biết điểm M(0;1), đường thẳng AN có phương trình $2\sqrt{2}x+y-4=0$. Tìm tọa độ điểm A.

Bài giải





Gọi $AB = x; AD = y \Rightarrow xy = 2\sqrt{2}$ (1). Ta có $S_{AMN} = xy - \frac{xy}{4} - \frac{xy}{4} - \frac{xy}{8} = \frac{3}{8}xy = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Có $d(M;AN) = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{4}.AN = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow AN = 2\sqrt{3} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}$ (2).

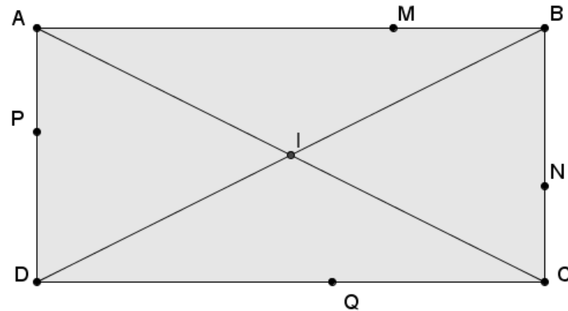
Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4\left(6+\sqrt{34}\right) \\ y^2 = 6 - \sqrt{34} \end{cases} \Rightarrow AM^2 = \frac{102+15\sqrt{34}}{4}$.

Gọi $A\left(a; 4-2\sqrt{2}a\right) \Rightarrow a^2 + \left(3-2\sqrt{2}a\right)^2 = \frac{102+15\sqrt{34}}{4}$. Từ đó suy ra tọa độ A.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD biết AB = 2BC. Đường thẳng AB đi qua điểm $M\left(\frac{-4}{3};1\right)$. Đường thẳng BC đi qua điểm N(0;3), đường thẳng AD đi qua điểm P(4;3) và điểm Q(7;4) nằm trên đường thẳng CD. Viết phương trình các cạnh hình chữ nhật.

Bài giải





+) Gọi VTPT của BC là $\vec{n}(a;b)$. Ta có $BC: ax+by-3b=0;\ CD: bx-ay-7b+4a=0.$

Từ giả thiết, do $AB=2BC$ suy ra:

$$d(P;BC)=2d(M;DC)\Rightarrow \frac{|2a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|3a-\frac{25}{3}b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{5}{3}b \\ a=\frac{25}{3}b \end{array}\right..$$

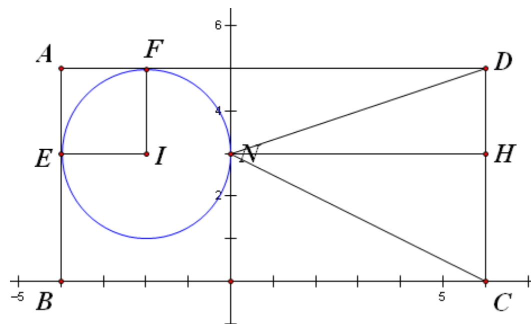
- Với $a=\frac{5}{3}b$, chọn $a=5,b=3\Rightarrow \begin{cases} BC: 5x+3y-9=0; \\ CD: 3x-5y-1=0; \\ AB: 3x-5y+9=0; \\ AD: 5x+3y-29=0. \end{cases}$
- Với $a=\frac{25}{3}b$, chọn $a=25,b=3\Rightarrow \begin{cases} BC: 25x+3y-9=0 \\ CD: 3x-25y+79=0 \\ AB: 3x-25y+29=0 \\ AD: 25x+3y-109=0 \end{cases}.$

Câu 15 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB, AD tiếp xúc với đường tròn (C) có phương trình $(x+2)^2+(y-3)^2=4$. Phương trình đường chéo $AC: x+2y-6=0$. Chứng minh đường tròn (C) tiếp xúc với trục tung. Gọi N là tiếp điểm của (C) và trục tung. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết A có hoành độ âm và điểm D có hoành độ dương, diện tích tam giác CND bằng 15



(Đề Thi Thử THPT Chuyên Thái Bình 2016 Lần 3)

Giải



(C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính R = 2.

Có $d(I;Oy)=|x_1|=2=R\Rightarrow(C)$ tiếp xúc với trục tung.

N là tiếp điểm của (C) và trục tung n $N(0;3)\Rightarrow N\in(AC)$

Vì AB, AC tiếp xúc với (C) nên $IA=\sqrt{2}R=2\sqrt{2}$ /

Gọi $A(6-2a;a)$ thuộc (AC)

$\Rightarrow(6-2a+2)^2+(a-3)^2=8\Rightarrow 5a^2-38a+65=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=5\Rightarrow A(-4;5)\ (t/m) \\ a=\dfrac{13}{5}\Rightarrow A\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{13}{5}\right)\ (loai) \end{array}\right.$ → $A(-4;5)$

Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của AB, AD với (C).

→ E, F là giao của $(A;2):(x+4)^2+(y-5)^2=4$ và $(C):(x+2)^2+(y-3)^2=4$

→ E, F thuộc đường thẳng $(x+4)^2+(y-5)^2-(x+2)^2-(y-3)^2=0$

$\Rightarrow(EF):x-y+7=0$

→ Tọa độ của E, F là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y+7=0 \\ (x+4)^2+(y-5)^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y-7 & (1) \\ (x+4)^2+(y-5)^2=4 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2): $\Rightarrow(y-3)^2+(y-5)^2=4\Leftrightarrow 2y^2-16y+30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=5\Rightarrow x=-2 \\ y=3\Rightarrow x=-4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{AE}=(0;-2);\overrightarrow{AF}=(2;0) \\ \overrightarrow{AF}=(0;-2);\overrightarrow{AE}=(2;0) \end{array}\right.$

→ AE, AF song song với 2 trục tọa độ



Vì D có hoành độ dương nên AF phải song song với trục hoành $\Rightarrow \overrightarrow{AE} = (0;-2); \overrightarrow{AF} = (2;0)$

Ta có: $\begin{cases}(AB): x = -4 \\ (AD): y = 5\end{cases}$

Gọi $D(d;5)$. Vì $CD//Oy$ kết hợp với C thuộc AC nên $C\left(d;\frac{6-d}{2}\right)$

Kẻ đường cao NH của tam giác CND suy ra NH = d.

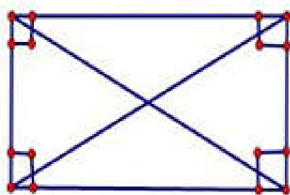
$$\Rightarrow S_{CND} = \frac{1}{2}NH.CD = \frac{1}{2}d\left(5 - \frac{6-d}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(2 + \frac{d}{2}\right) = 15$$

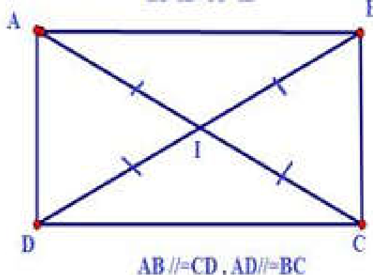
$$\Rightarrow d^2 + 4d - 60 = 0 \Rightarrow (d+10)(d-6) = 0 \Rightarrow d = 6 \text{ (do } d \geq 0\text{)}$$

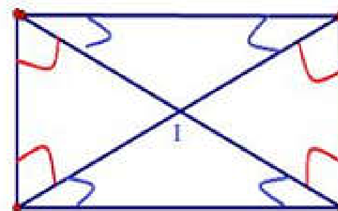
$\Rightarrow D(6;5), C(6;0) \Rightarrow B(-4;0)$

Vậy $A(-4;5), B(-4;0), C(6;0), D(6;5)$

Hình chữ nhật chúng ta khai thác yếu tố sau đây : 4 góc vuông , các cặp cạnh đối song song và bằng nhau . Giao điểm của 2 đường chéo là trung điểm mỗi đường…





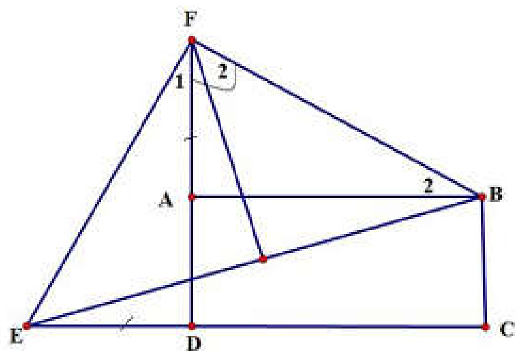


BÀI MẪU CÓ QUAY VIDEO HƯỚNG DẪN

Bài toán này chúng ta thấy yếu tố vuông góc và bằng nhau

Bài 17 : Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm F(3,3) sao cho $DF = DC$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho DE = AF . Biết điểm I(11/2,-1/2) là tâm hình chữ nhật ABCD . Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật ABCD . Biết phương trình đường thẳng BE : 3x – 7y – 17 = 0 .





Bước 1 : Chứng minh tính chất hình học :

Nhận định : Bài toán này chúng ta thấy yếu tố vuông góc và bằng nhau :

Cụ thể là tam giác EFB vuông cân , việc chứng minh như sau :

Có $\Delta DEF = \Delta AFB$ (Do DE = AF, DF = AB (Do cùng bằng DC)). Góc EDA = Góc FAB = 90^0 => $F_1 = B_2$.

Mà có $B_2 + F_2 = 90^0$. Suy ra góc EFB = 90^0

Từ 2 tam giác $\Delta DEF = \Delta AFB \Rightarrow FB = FE \Rightarrow FEB$ vuông cân tại F.

Bước 2 : Tính toán :

Xác định điểm E và B có nhiều cách :

Cách 1 : Viết phương trình đường thẳng qua F vuông góc BE , cắt BE tại N . Khi đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFB .

Phương trình $FN: 7x+3y+m=0$, qua $F(3,3) \Rightarrow m=-30 \Rightarrow FN: 7x+3y-30=0$

⇨ Tọa độ N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x-7y-17=0 \\ 7x+3y-30=0 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{9}{2};\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow FN=\sqrt{\frac{29}{2}}$

⇨ Vậy E, B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{2} \\ 7x+3y-30=0 \end{cases} \Rightarrow B(8,1), E(1;-2)\,(y_B>0)$

Vì I là trung điểm $BD \Rightarrow D(3;-2)$

Phương trình AD : qua $F(3;3), D(3;-2) \Rightarrow$ phương trình $x-3=0$



Phương trình AB vuông góc AD và qua $B(8;1)$ => Phương trình : $y-1=0$

$\Rightarrow A(3;1)$, C đối xứng với A qua tâm I nên $C(8;-2)$

Cách 2 : Vì tam giác FEB vuông cận tại F nên ta có các góc BEF = FBE = 45^O , gọi véc tơ pháp tuyến của BF , FE là $\overrightarrow{n_1}(a,b)$, véc tơ pháp tuyến của BF : $\overrightarrow{n_2}(3;-7)\Rightarrow$

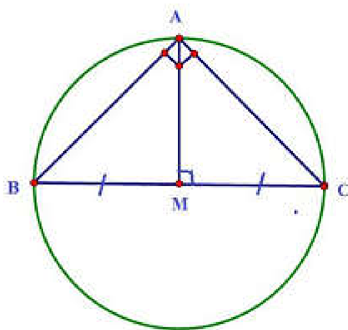
$$\cos(n_1;n_2)=\frac{|3a-7b|}{\sqrt{3^2+7^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{2}{5} \text{ hoặc } \frac{a}{b}=\frac{-5}{2}$$

Với $a=2, b=5$ ta có phương trình đường thẳng $BF: 2(x-3)+5(y-3)=0$ hay $2x+5y-21=0$, giao với BE tại $(8;1)$.

Với $a=-5, b=2$ ta có phương trình đường thẳng $BF: -5(x-3)+2(y-3)$ hay $-5x+2y+9=0$, giao với BE tại $(1;-2)$

Vì 2 đường thẳng FB và FE vuông góc với nhau, $y_B>0$ nên $B(8;1), E(1;-2)$.

Tính chất cần nhớ *: Tam giác vuông cân có tâm đường tròn ngoại tiếp M chính là trung điểm của* cạnh huyền BC . Và AM vuông góc BC tại M .



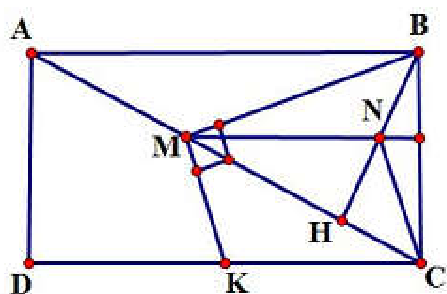
BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ ĐỂ CÁC EM HỌC THUỘC TÍNH CHẤT :

Bài 18 : Cho hình chữ nhật ABCD , Trên tia đối của tia AD lấy điểm sao cho DF = DC . Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho DE = AF . Biết điểm I(0,5) là tâm hình chữ nhật ABCD, A(-3,6) , B(1,2) . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác EFB.

Bài toán sử dụng trực tâm + đường trung bình :



Bài 19 : Cho hình chữ nhật ABCD ,Điểm B thuộc đường thẳng $2x-y+2=0$ Kẻ đường BH vuông góc AC (H thuộc AC) ,C thuộc đường : $x-y-5=0$. K(9,2) là trung điểm của BC , M(9/5,2/5) là trung điểm AH . Tìm các đỉnh hình chữ nhật ABCD .



Bước 1 : Chứng minh

Kẻ đường MN song song với AB => MN là đường trung bình của tam giác ABH (do qua M là trung điểm AH , MN song song AB) => MN//= ½ AB = ½ CD = KC (do K là trung điểm CD).

Vậy MNCK là hình bình hành => CN //MK

Nhận thấy MN vuông góc BC (do AB vuông góc BC) , BH là đường cao , nên N là trực tâm tam giác BCM

⇨ CN vuông góc MB

Kết luận : MK vuông góc MB

Bước 2 : Tính toán

Ta tham số hóa điểm B và C :

$B(b+2b+2),C(c,c+5)$

$\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MB}=0\Rightarrow b=1\Rightarrow B(1;4)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BK}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=4(loai)\\c=9(tm)\end{array}\right.\Rightarrow C(9;4)\Rightarrow D(9;0)$

Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\rightarrow A(1;0)$

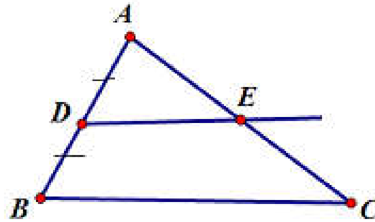
Kinh nghiệm : Trong nhiều bài toán khi có yếu tố trung điểm người ta hay nghĩ đến việc vẽ đường trung bình , nếu có đường cao người ta sẽ tìm mối liên hệ đến trực tâm.



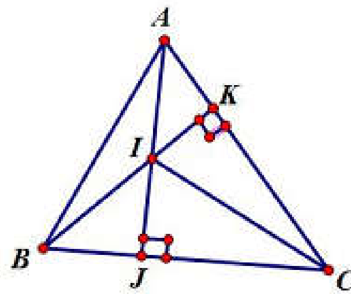
Tính chất đã sử dụng trong bài toán này :

D là trung điểm AB, kẻ DE song song BC

=> DE là đường trung bình của BC => DE //=1/2 BC.



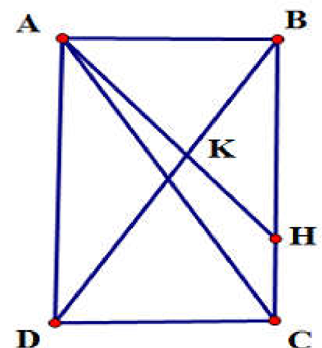
AJ vuông góc BC, BK vuông góc AC => I là trực tâm tam giác => CI vuông góc AB



Bài 20: Cho Hình chữ nhật ABCD , cos(góc ACD) $=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, H\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$ thuộc BC, $HB=2HC$. Gọi K(1,0) là giao điểm của AH với BD . Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật .

Cách 1 : giải thông thường:

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, AC=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow b=2a$



ABCD là hình chữ nhật $\Rightarrow BC=AD$, mà ta có

$BH=\frac{2}{3}BC\Rightarrow\frac{BH}{AD}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{HK}{AK}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\frac{HK}{AK+HK}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{HK}{AH}=\frac{2}{5}$

Ta tính được: $HK=\frac{2\sqrt{5}}{3}(1)$



Ta có: $AH^2 = AB^2 + HK^2 \Rightarrow AH = \frac{5a}{3} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3}(2)$

Từ (1) và (2): $\Rightarrow a = \sqrt{5}$

Từ $\frac{\overrightarrow{KH}}{\overrightarrow{AK}} = \frac{2}{3} \to A(2;2)$

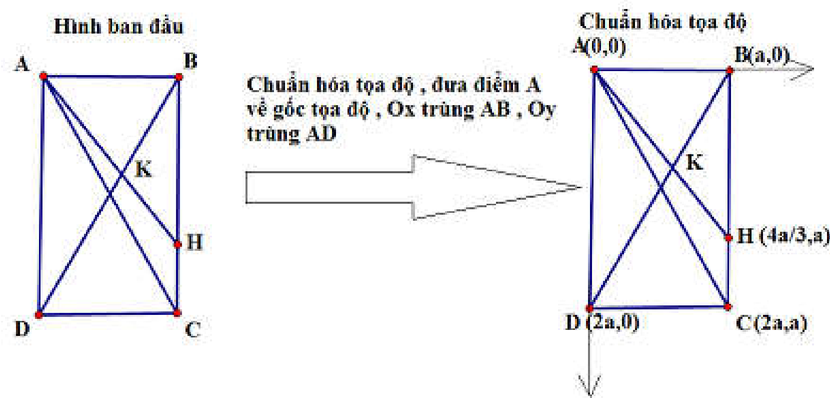
Điểm B thuộc đường tròn (A,AB) , đường tròn (H,HB) => Tọa độ B thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{80}{9} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Tìm điểm C: $\frac{\overrightarrow{BH}}{\overrightarrow{HC}} = 2 \to C(-1;-2)$

Tìm điểm D: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \to D(-2;0)$

Cách 2 : Phương pháp chuẩn hóa tọa độ :



Ta vẫn có

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, AC = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \Rightarrow b = 2a$

Sau khi chuẩn hóa như hình bên phải tai cần tính tọa độ điểm K theo a .



K là giao điểm của AH và BD nên tọa độ K là nghiệm của hệ :

Phương trình AH : qua $A(0;0), H\left(\frac{4}{3}a;a\right): 4x-3y=0$

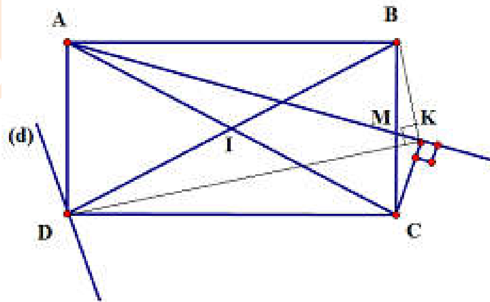
Phương trình đường thẳng BD qua $B(a,0), D(2a,0): 2x+y-2a=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-3y=0 \\ 2x+y-2a=0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{3a}{5};\frac{4a}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{HK}\left(-\frac{2a}{5};-\frac{2a}{15}\right) \Rightarrow HK=\frac{2}{3}a$$

Đến đây các em hoàn toàn có thể tính được a bằng cách tính $HK=\frac{2\sqrt{5}}{3}$...

Ưu điểm của phương pháp này là các em không cần phải vẽ thêm hình và sử dụng Talet mà vẫn tính được độ dài hình chữ nhật.

Bài 21:(Khai thác yếu tố vuông góc) Cho hình chữ nhật ABCD , B(1,2) , M thuộc BC , CK vuông góc AM tại $K(-3;-1)$, điểm D thuộc $(d): x-3y+7=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác CDK .



Để viết phương trình đường tròn ta cần xác định được tâm và bán kính , ở đây đường tròn ngoại tiếp , CDK chính là tâm I đường kính AC , BD .

Ta chứng minh dễ dàng như sau :

Chứng minh góc BKD = 90^O

Nhận thấy tứ giác AKCD nội tiếp nên I , AC là tâm và đường kính của đường tròn (C) ngoại tiếp AKCD , ABCD cũng nội tiếp đường tròn (C) tâm I đường kính là AC

Suy ra BD cũng là đường kính của đường tròn (C) => Góc BKD = 90^O

Tham số hóa điểm $D(3a-7,a)$



$\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KD}=0$

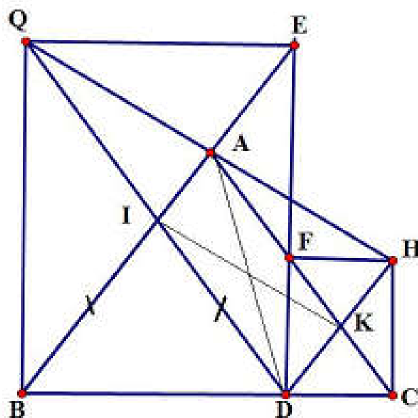
$\overrightarrow{KB}(4;2),\overrightarrow{KD}(3a-4,a+1)\Rightarrow D(-4;1)$

Từ $B(1;2),\mathrm{D}(-4;1)$ => Tâm $I\left(-\frac{3}{2};1\right)$, bán kính = $\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác DKC .

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}$$

Bài 22 : Cho tam giác ABC cân tại A, phương trình đường thẳng $AB: x-3y+5=0, AC=\sqrt{10}$ cho D thuộc BC , kẻ Dx vuông góc BC . Đường thẳng Dx giao AB và AC tại E ,F . Dựng 2 hình chữ nhật BDEQ , DCHF. Cho điểm $Q\left(\frac{2}{5};\frac{29}{5}\right)$, H thuộc đường thẳng: $9x+8y=0$. Tìm các đỉnh A,B,C. Biết $x_B<0$



Bước 1 :Chứng minh :

Ta cần chứng minh Q,A,H thẳng hang : Dùng IK //QA, IK//AH . Thật vậy

Ta có $B_1=C_1$ (tam giác cân), $B_1=D_1$ (hình chữ nhật)

Vậy $D_1=C_1\Rightarrow ID//AC$, chứng minh tương tự ta cũng có: $DK//IA\Rightarrow AKDI$ là hình bình hành, nên $IA=KD$

Lại có KD = KH nên IA = KH . Vậy IA//=KH là hình bình hành => IK //=AH .



Chứng minh tương tự ta cũng có IK//=QA

Vậy 3 điểm Q,A,H thẳng hàng và A là trung điểm của QH

Bước 2 : Tính toán

Gọi tọa độ $H(a;b):9a+8b=0, Q\left(\frac{2}{5};\frac{29}{5}\right) \Rightarrow A\left(\frac{5a+2}{10};\frac{5b+29}{10}\right)$

Vì A thuộc AB có phương trình AB: $x-3y+5=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{8}{5} \\ b=-\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=1 \\ y_A=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$$

Có $AB=AC=\sqrt{10}$, B thuộc AB . Vậy điểm B thỏa hệ : $\Rightarrow \begin{cases} x-3y+5=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases}$

$\Rightarrow B(-2;1) tm, B(4;3)$ (loại)

Tìm C :

Viết phương trình BC : Có vtpt $\overrightarrow{BQ}$ và qua $B(-2;1): x+2y=0$

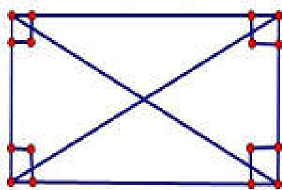
Viết phương trình CH vuông góc BC nên có vtpt $\vec{n}(2;-1)$ và qua $H\left(\frac{8}{5};\frac{-9}{5}\right) \Rightarrow CH: 2x-y-5=0$

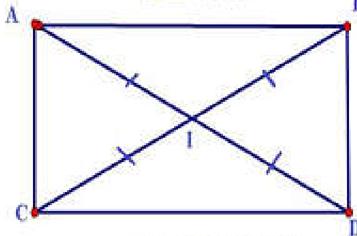
Vậy điểm C thỏa mãn hệ phương trình:

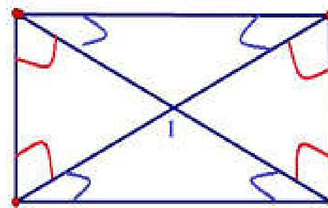
$$\Rightarrow C\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \Rightarrow C(2;-1)$$

Tính chất đã học : Khai thác cả 3 tính chất dưới đây .

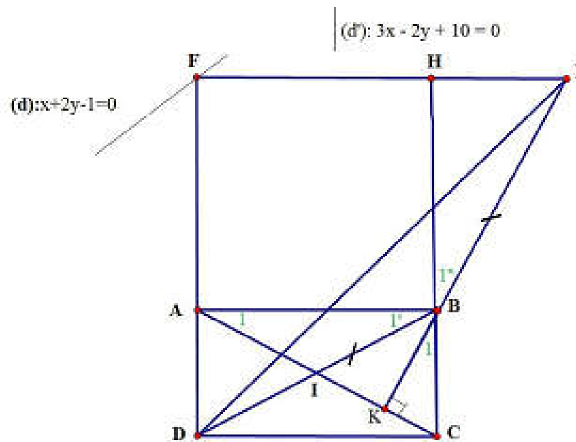








Bài 23 : Cho hình chữ nhật ABCD , BK vuông góc AC tại K , $E(-2;3)$ thuộc tia đối của tia BK sao cho BE = BD . Qua E kẻ đường thẳng Ex song song với AB. Đường Ex cắt AD tại F , cắt BC tại H. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF . Biết F thuộc $(d): x-2y+1=0$, EF vuông góc với đường thẳng $(d'): 3x-2y+10=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.



Bước 1 : Chứng minh :

Nhận định tam giác FED vuông cân tại F , F =90^O (giải thiết)

Ta chứng minh thêm FE = FD

Nhận thấy: 2 tam giác BHE và BAD.

$B_{1''}=B_1=A_1$, Mà $A_1=B_{1'}$ nên $B_{1''}=B_{1'}$ => 2 tam giác BHE = BAD (tam giác vuông có 2 góc nhọn tương ứng bằng nhau và một cạnh góc vuông)



$\Rightarrow HE = AD, AB = BH$ (=> ABHF là hình vuông)

$FD = FA + AD, FE = FH + HE \Rightarrow FE = FD$ (ĐPCM).

Bước 2 : Tính toán :

Phương trình EF : qua $E(-2;3)$, vuông góc $d': 3x - 2y + 10 = 0$ nên có phương trình $2x + 3y - 5 = 0$

=> F thỏa mãn hệ phương trình: $\Rightarrow F\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow F(1;1)$

Ta tính được: $DF = EF = \sqrt{13}$

Phương trình FD song song d', qua $F(1;1): 3x - 2y - 1 = 0$

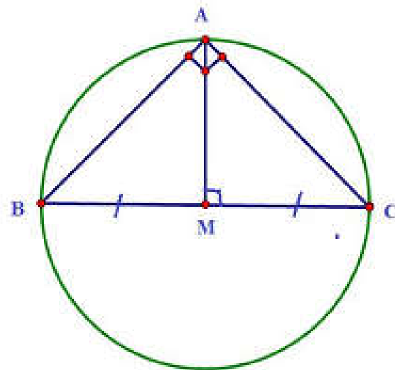
Vậy tọa độ D thỏa mãn: $\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 = DF = 13 \end{cases} \Rightarrow D(-1;2)$

$I\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right), DE = \sqrt{26} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{13}{2}}$

Vậy phương trình đường tròn là: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

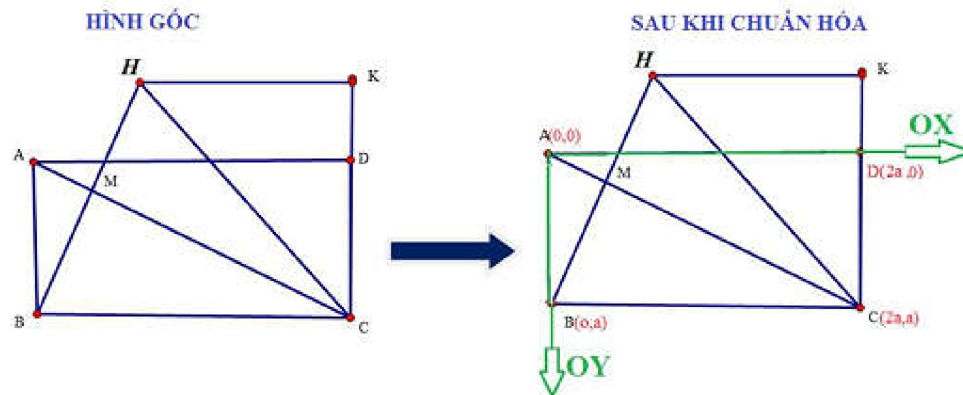
Nhận xét : Khi cho các độ dài bằng nhau , các em cố gắng tìm cách gắn nó vào các tam giác cụ thể để sử dụng giả thiết

Tính chất sử dụng :





Bài 24 : Trong Oxy. Cho hình chữ nhật ABCD có AD=2AB . Cho $H\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$ là điểm đối xứng của B qua AC . Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.biết C có tung độ âm. Pt $CD: x-y-10=0$



CÁCH 1 : DÙNG HÌNH CHUẨN HÓA TỌA ĐỘ:

Trên hình vẽ phần nào cho các em thấy được mục đích của thầy làm , đó là kéo cái hình chữ nhật ban đầu về hệ trục tọa độ gốc (Trong hàm số nó gọi là chuyển trục tọa độ) . Các em thấy đấy, tính chất hình không thay đổi , AD = 2AB . Và mọi giả thiết vẫn thế .Múc đích của việc làm này là thầy đi tìm độ dài hình chữ nhật , sau khi tìm được chúng ta lại giải bài toán ở dạng tổng quát. Đầu tiên ta tìm tọa độ điểm H theo a . (ở đây ta cho a >0 , là tọa độ dương).

Phương trình AC: $x-2y=0 \Rightarrow BD: 2x-y-a=0 \Rightarrow M \Rightarrow H\left(\frac{4a}{5};\frac{-3a}{5}\right)$

Có phương trình CD: $x-2a=0 \Rightarrow d_{H\to CD}=\frac{\left|\frac{4a}{5}-2a\right|}{1}=\frac{6a}{5}$

Trên thực tế nếu trở lại bài toán gốc ban đầu, khi chúng ta không chuyển trục tọa độ thì các em thấy rằng $H\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$

$$CD: x-y-10=0 \Rightarrow d_{H\to CD}=\frac{\left|\frac{31}{5}+\frac{17}{5}-10\right|}{\sqrt{2}}=\frac{36}{2.\sqrt{5}}$$



Bởi vì độ dài các cạnh không thay đổi nên ta luôn có :

$\frac{36}{5.\sqrt{2}}=\frac{6a}{5}\Rightarrow a=3.\sqrt{2}$ (**cái này cực kỳ quan trọng , và nó là trọng tâm của phương pháp này**)

Vậy mục đích chúng ta đã làm được , đó là tính độ dài cạnh hình chữ nhật .

Một điều thú vị nữa các em quan sát này , qua việc chuẩn hóa tọa độ chúng ta cũng có thể tích được độ dài đoạn HC nữa: $HC\left(\frac{6a}{5};-\frac{8a}{5}\right)\Rightarrow HC=\sqrt{\left(\frac{6a}{5}\right)^2+\left(\frac{6a}{5}\right)^2}=2a=6\sqrt{2}$

Thật tiện lợi quá , chỉ bằng một phương pháp tưởng chừng như đơn giản vậy mà các em tìm được độ dài hình chữ nhật , và khoảng cách từ CH .

Lúc này việc tìm tọa độ C quá dễ dàng rồi , C lúc này thuộc đường thẳng $CD:x-y-10=0$, và đường tròn tâm $H\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$, bán kính $HC=6\sqrt{2}$. Tọa độ C lúc này là nghiệm của phương hệ trình

$$\begin{cases}\left(x-\frac{31}{5}\right)^2+\left(y-\frac{17}{5}\right)^2=72\\ x-y-10=0\end{cases}$$

Thầy nghĩ đến đây các em tự giải đươc rồi. Trong bài thi các em cần nêu rõ là , bài toán được trình bày theo 2 bước . **Bước 1** chuẩn hóa tọa độ để tìm độ dài cạnh hình chữ nhật .

Bước 2 quay trở lại bài toán tổng quát trên với độ dài đã tìm được để tính toán bình thường.

Sau khi dung tọa độ hóa các em thấy rằng :

HC = 2a = AD , Điều đó có nghĩa là

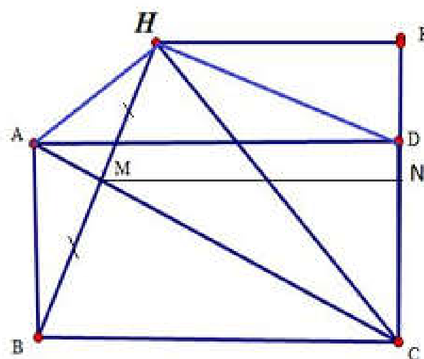
$\Delta DCA=\Delta BAC\left(c.c.c\right)$

Bây giờ chúng ta chứng minh nó bằng hình thuần túy , ta có:

$\Delta HAC=\Delta BAC\left(c.c.c\right)$

$\Delta DCA=\Delta BAC\left(c.c.c\right)$

$\Rightarrow\Delta DCA=\Delta BAC\Rightarrow HC=AD=2a$





Đến đây chúng ta lại phải tìm cách tính độ dài hình chữ nhật (a) và (2a) Công việc không hề dễ dàng một chút nào đúng không em ?

Vậy HK = ?

Theo như cách trên thì $HK = \frac{6a}{5}$

Trên hình phẳng này chúng ta cũng cần chứng minh được điều như vậy thì mới tính được a . Và việc này đương nhiên không dễ dàng bằng phương pháp **CHUẨN HÓA TỌA ĐỘ** ở trên . Các em xem rồi đánh giá nhé . (Bên trái)

Tính độ dài HK bằng hình thuần túy .

Tam giác vuông ABC có:

$AB^2 = AM.\text{AC}$

$\text{AC} = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow AM = \frac{a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \frac{MK}{AD} = \frac{CM}{CA} = \frac{4}{5} \Rightarrow MK = \frac{8}{5}a$

MN là đường trung bình của hình thang HKCB (Do ta kẻ MN vuông góc CD).

$\Rightarrow AM = \frac{HK + BC}{2} \Rightarrow HK = \frac{6a}{5}$

Đến đây bài toán đã được chứng minh.

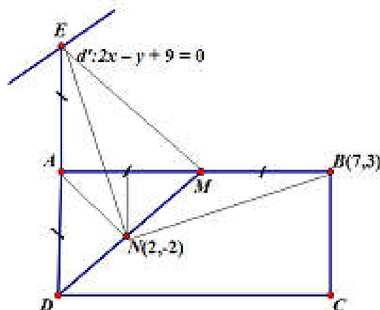
Bài 25: Trong mặt phẳng OXY , cho hình chữ nhật ABCD , Có AB = 2BC . Điểm B(7,3). Gọi M là trung điểm của AB , E là điểm đối xứng với D qua A , Biết rằng N(2,-2) là trung điểm của DM , Điểm E thuộc đường $(d'): 2x - y + 9 = 0$. Tìm tọa độ của D.

Nhận định : Bằng kinh nghiệm chúng ta thấy : NB vuông góc NE .

Bước 1: Chứng minh tính chất hình học:

Cách 1: Nếu các em thấy bí thì dùng kỹ thuật chuẩn hóa để giải quyết bài này cực kỳ đơn giản vì có $AB = 2BC$.

Cách 2: Dùng tích vô hướng của 2 vecto:





Ta dùng Tích vô hướng của vecto để chứng minh NE vuông góc NB.

Việc làm này không khó, các em có thể dùng kĩ thuật biểu diễn 2 vec tơ $\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NE}$

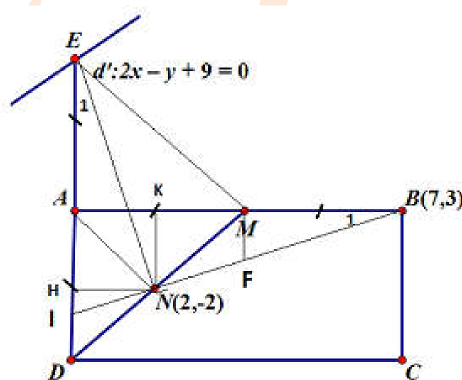
$\overrightarrow{AB}=2\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0,\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$ (vì góc A = 90^0), đặt vậy vì AB = 2AD.

$$\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+2\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NE}=-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right).\left(\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{4}b^2+2\vec{a}.\vec{b}\right)=0$$

Cách 3: Dùng hình học thuần túy: Xét 2 tam giác :KNB = HNE (do K = H = 90^o , KN= ½ AD , KH = ½ AM . Mà AM = AD . Lại có EH = BK (Do EH=EA+AH, BK=BM+MK). Vậy đã CM được 2 tam giác bằng nhau => E1 = B1 => Tứ giác AEBN nội tiếp => ENB = EAB = 90^O



Bước 2 : Tính toán

Phương trình đường thẳng NB: $\dfrac{x-2}{2-7}=\dfrac{y+2}{-2-3}\Rightarrow x-y-4=0$

Phương trình đường thẳng NE: $x+y=0\Rightarrow$ Tọa độ E là nghiệm hệ: $\Rightarrow E\begin{cases}x+y=0\\2x-y+9=0\end{cases}\Rightarrow E\left(-3;3\right)$

$$\Rightarrow\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{BI}}=\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{BA}}=\frac{3}{4}\Rightarrow I\left(\frac{1}{3};-\frac{11}{3}\right)$$

Đặt AD = x , ED = AB =2x



$NK = \frac{1}{2}x$

$MF = \frac{2}{3}NK = \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow AI = 2MF = \frac{2}{3}x \Rightarrow EI = \frac{5}{3}x$

$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{EI}}{\overrightarrow{ED}} = \frac{5}{6} \Rightarrow D(1;-5)$

CHÚ Ý :

Bài toán cho trên sử dụng rất nhiều tỉ lệ độ dài (áp dụng ĐL TALET)

Các em có thể dùng ***CHUẨN HÓA TỌA ĐỘ*** để tính được độ dài các cạnh hình chữ nhật , từ đó tính được E rồi tính được ED , EN … Tuy nhiên các em sẽ bị khó khăn khi loại nghiệm , nếu không cẩn thận sẽ bị thừa nghiệm .

Nếu dùng tỉ lệ độ dài (vec tơ) thì sẽ không bị như vậy, không cần phải loại nghiệm.

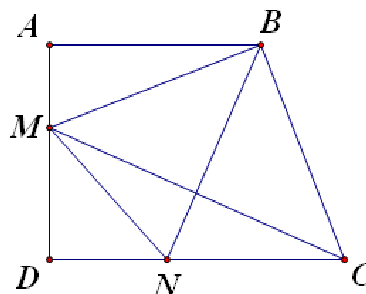


HÌNH THANG

Bài 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $AB = AD < CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình là $y-2=0$. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M. Đường phân giác trong góc $\widehat{MBC}$ cắt cạnh DC tại N. Biết rằng đường thẳng MN có phương trình $7x-y-25=0$. Tìm tọa độ đỉnh D.

(Đề Thi Thử THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2016 Lần 1)

Giải



Tứ giác BMDC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BDC} = \widehat{DBA} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại B, BN là phân giác trong $\widehat{MBC}$

$\Rightarrow M, C$ đối xứng qua BN

$\Rightarrow AD = d(B, CN) = d(B, MN) = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

Do $AB = AD \Rightarrow BD = AD\sqrt{2} = 4$

$BD: y-2=0 \Rightarrow D(a;2),\ \text{BD=4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \Rightarrow D(5;2) \\ a=-3 \Rightarrow D(-3;2)(loai) \end{array}\right.$

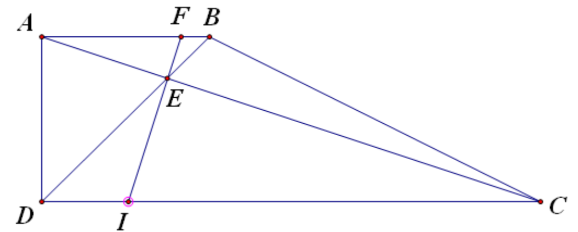
Vậy có một điểm thỏa mãn là: $D(5;2)$

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, $AB = AD = \dfrac{1}{3}CD$. Giao điểm của AC và BD là $E(3;-3)$, điểm $F(5;-9)$ thuộc cạnh AB sao cho $AF = 5FB$. Tìm tọa độ đỉnh D, biết rằng đỉnh A có tung độ âm.

(Đề Thi Thử THPT Chuyên ĐH Vinh 2016)



Giải



Gọi $I = EF \cap CD$

Ta chứng minh $\triangle EAI$ vuông cân tại E.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Khi đó $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}.\vec{b} = 0$

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + 3\vec{a}$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + 3\vec{a}\right) - \frac{5}{6}\vec{a} = \frac{1}{12}\left(3\vec{b} - \vec{a}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EF} = \frac{1}{12}\left(3\left|\vec{b}\right|^2 - 3\left|\vec{a}\right|^2\right)$. Do đó $AC \perp EF$ (1)

Từ (1) suy ra tứ giác ADIE nội tiếp. Suy ra $I_1 = D_1 = 45^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác EAI vuông cân tại E.

Ta có $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{EF} = (2;-6)$ nên $AC: x - 3y - 12 = 0 \Rightarrow A(3a + 12; a)$

Theo định lý Talet ta có: $\frac{EI}{EF} = \frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{EI} = 3\overrightarrow{FE} \Rightarrow I(-3;15)$

Khi đó $EA = EI \Leftrightarrow (3a+9)^2 + (a+3)^2 = 360 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -9 \end{array}\right.$

Vì A có tung độ âm nên $A(-15;-9)$

Ta có $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{AF} = (20;0)$ nên $AD: x = -15 \Rightarrow CD: y = 15$. Do đó $D(-15;15)$

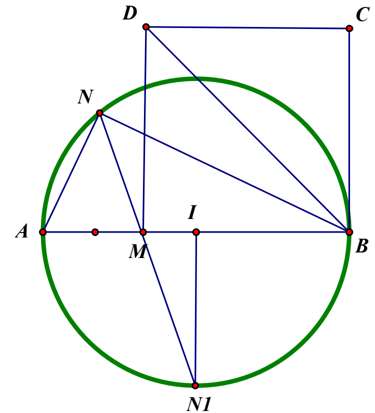
Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại B và C có $AB > CD$ và CD = BC. Đường tròn đường kính AB có phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ cắt cạnh AD của hình thang tại điểm thứ hai N. Gọi M là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng AB. Biết điểm N có tung độ dương và đường thẳng MN có phương trình $3x + y - 3 = 0$, tìm tọa độ của các đỉnh A, B, C, D của hình thang ABCD.

(Đề thi thử THPT Đa Phúc Hà Nội 2016 Lần 1)



Giải

+) $N \in MN \cap (C)$ => tọa độ N là nghiệm của hệ phương trình:



$\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$, do N có tung độ dương nên $N\left(\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right), N_1(2;-3$

+ Tứ giác BMND nội tiếp $\Rightarrow BNM = BDM = 45^0$

→MN là đường phân giác trong góc BNA

→ N_1 là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow IN_1 \perp AB$ với $I(2;0)$ là tâm của

$(C) \Rightarrow AB: y = 0$

+) $M = MN \cap AB \Rightarrow M(1;0)$, A, B là các giao điểm của đt AB và $(C) \Rightarrow A(-1;0)$ và $B(5;0)$

hoặc $A(5;0)$

và $B(-1;0)$

Do $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ nên $A(-1;0)$ và $B(5;0)$

+) $AN: 2x - y + 2 = 0, MD: y = 1 \Rightarrow D = AN \cap MD \Rightarrow D(1;4)$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow C(5;4)$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và AD = 2BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x + y + 3 = 0$ và $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.

(Đề thi thử THPT Phước Bình Bình Phước 2016 Lần 2)

Giải

Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K

và cắt AB tại I

→K là trực tâm của tam giác ABE

→ $BK \perp AE$

K là trung điểm của AH nên $KE \parallel = \frac{1}{2}AD$ hay $KE \parallel = BC$

Do đó: $CE \perp AE \Rightarrow CE: 2x - 8y + 27 = 0$

Mà $E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};3\right)$, mặt khác E là trung điểm của HD nên $D(-2;3)$

- Khi đó $BD: y - 3 = 0$, suy ra $AH: x + 1 = 0$ nên $A(-1;1)$

- Suy ra $AB: x - 2y + 3 = 0$. Do đó $B(3;3)$

KL: $A(-1;1), B(3;3)$ và $D(-2;3)$

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang ABCD với hai đáy là AB và CD. Biết diện tích hình thang bằng 14, đỉnh $A(1;1)$ và trung điểm cạnh BC là $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D nằm trên đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$.

(Đề thi thử THPT Lương Tài 2 2016 Lần 3)

Giải

Gọi $E = AH \cap DC$. Dễ thấy $\Delta HAB = \Delta HEC \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABCD} = 14$

$AH = \frac{a\sqrt{13}}{2}, AE = 2AH = a\sqrt{13}$; $AE: 2x - 3y + 1 = 0$

$D \in d \Rightarrow D(d; 5d+1), d > 0$

$S_{ADE} = \frac{1}{2}AE.d(D, AE) = 14 \Leftrightarrow d(D, AE) = \frac{28}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 2 \\ d = \frac{-30}{13}(L) \end{array}\right.$



→ $D(2;11)$

+ H là trung điểm $AE \Rightarrow E(-2;1)$

Phương trình CD: $3x - y + 5 = 0$

AB đi qua A và song song với CD $\Rightarrow ptAB: 3x - y - 2 = 0$

Bài 6 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và B, có $BC = 2AD$, đỉnh $A(-3;1)$ và trung điểm M của đoạn BC nằm trên đường thẳng $d: x - 4y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang ABCD, biết $H(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng CD.

(Đề thi thử THPT Marie – Curie Hà Nội 2016)

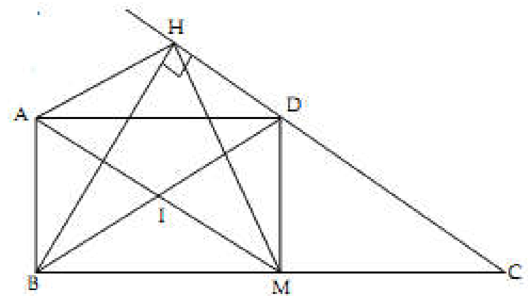
Giải

* Từ giả thiết ta có ABMD là hình chữ nhật.

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp ABMD.

* $BH \perp DH \Rightarrow H \in (C) \Rightarrow HA \perp HM \; (*)$

* $M \in d: x - 4y - 3 = 0 \Rightarrow M(4m+3; m)$



* $\overrightarrow{AH} = (9;-3), \overrightarrow{HM} = (4m-3; m+2)$

* ta có: $(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HM} = 0$

$\Leftrightarrow 9(4m-3) - 3(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Suy ra: $M(7;1)$

* ADCM là hình bình hành

$\Rightarrow DC$ đi qua $H(6;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (10;0)$

=> Phương trình $DC: y + 2 = 0$

* $D \in DC: y + 2 = 0 \Rightarrow D(t;-2)$

* $\overrightarrow{AD} = (t+3;-3), \overrightarrow{MD} = (t-7;-3)$



* $AD \perp DM \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MD} = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-7)+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \Rightarrow D(-2;-2) \\ t=6 \Rightarrow D(6;-2) \equiv H\,(loai) \end{array}\right.$

* Gọi $I = AM \cap BD \Rightarrow I$ là trung điểm $AM \Rightarrow I(2;1)$

* I là trung điểm $BD \Rightarrow B(6;4)$

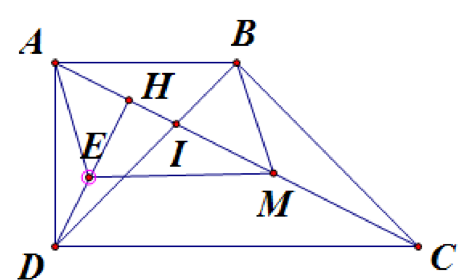
* M là trung điểm $BC \Rightarrow C(8;-2)$

* Vậy $B(6;4), C(8;-2), D(-2;-2)$

<u>Bài 7:</u> Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD $\left(\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^0\right)$ có đỉnh $D(2;2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D lên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y+4=0$.

(Đề thi thử THPT Nguyễn Viết Xuân Phú Yên 2016)

<u>Giải</u>



Gọi E là trung điểm của đoạn DH

Khi đó tứ giác ABME là hình bình hành

$\Rightarrow ME \perp AD$ nên E là trực tâm tam giác ADM

$\Rightarrow AE \perp DM$ mà $AE // DM \Rightarrow DM \perp BM$

Phương trình đường thẳng $BM: 3x+y-16=0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x+y=16 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$

Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{IB}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow I\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng $AC: x+2y-10=0$

phương trình đường thẳng $DH: 2x-y-2=0 \Rightarrow H\left(\frac{14}{5};\frac{18}{5}\right) \Rightarrow C(6;2)$



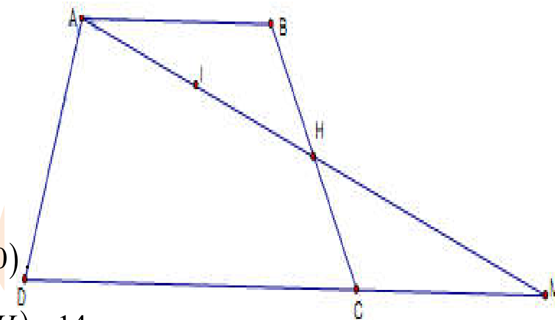
từ $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IA} \Rightarrow A(2;4)$

Bài 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với AB//CD có diện tích bằng 14, $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh BC và $I\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$.

(Đề thi thử THPT Phan Thúc Trực Nghệ An 2016 Lần 1)

Giải

Vì I là trung điểm của AH nên A(1;1);



Ta có: $AH = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Phương trình AH là: $2x - 3y + 1 = 0$

Gọi $M = AH \cap CD$ thì H là trung điểm của AM.

→ $M(-2;-1)$. Giả sử $D(a;5a+1)$ $(a > 0)$.

Ta có: $\Delta ABH = \Delta MCH \Rightarrow S_{ABCD} = AH.d(D, AH) = 14$

$\Rightarrow d(D, AH) = \frac{28}{\sqrt{13}}$

Hay $|13a + 2| = 28 \Leftrightarrow a = 2$ (vì a > 0) $\Rightarrow D(2;11)$

Vì AB đi qua A(1;1) và có 1VTCP là $\frac{1}{4}\overrightarrow{MD} = (1;3) \Rightarrow AB$ có 1VTPT là $\vec{n}(3;-1)$

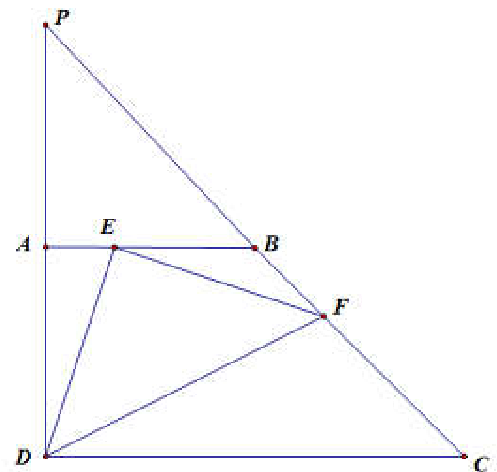
nên AB có phương trình là: $3x - y - 2 = 0$

Bài 9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, có $CD = 2AB = 2AD$. Gọi E là điểm thuộc AB sao cho $AB = 3AE$. Điểm F thuộc BC sao cho tam giác DEF cân tại E. Biết $E(2;4)$, phương trình của EF là $2x + y - 8 = 0$, D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và

điểm A có hoành độ nguyên thuộc đường thẳng $d':3x+y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

(Đề thi thử THPT Quốc Oai Hà Nội 2016 Lần 1)

Giải



Ta chứng minh tam giác DEF vuông cân tại E.

Gọi P là điểm đối xứng của D qua A

Tam giác DBP vuông tại B do $AB = AD = AP$

Do tam giác CBD vuông tại B nên C, B, P thẳng hàng.

Vì $EP = ED = EF$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PDF

do đó $AED = DFP$ nên tứ giác AEBF nội tiếp đường tròn $DEF = 90^0$.

Đường thẳng DE qua E, vuông góc với EF nên có phương trình: $x-2y+6=0$

Điểm D là giao điểm của DE và d nên $D(-2;2)$

Tam giác ADE vuông có $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 10AE^2 \Rightarrow AE^2 = 2$

Gọi $A(a;8-3a) \in d' \Rightarrow (a-2)^2 + (4-3a)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow A(1;5)$

Vì $\overrightarrow{EB} = -2\overrightarrow{EA} \Rightarrow B(4;2); \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow C(4;4)$

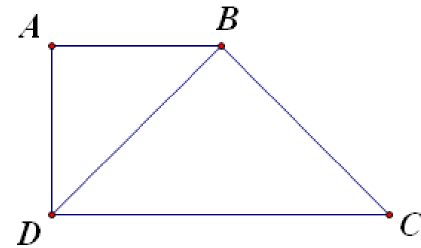
Kết luận $A(1;5), B(4;2); C(4;-4); D(-2;2)$

Bài 10: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết AB=AD=2; CD= 4, phương trình BD là x-y =0, C thuộc đường thẳng x- 4y -1= 0. Tìm tọa độ của A biết điểm C có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Trần Bình Trọng Khánh Hòa 2016 Lần 1)



Giải



Từ gt chứng minh được DB vuông góc với BC và suy ra $CB = 2\sqrt{2} = d\left[C,(BD)\right]$

$C(4c+1;c)$

$$\Rightarrow \frac{|4c+1-c|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |3c+1| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3c+1=4 \\ 3c+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-\frac{5}{3}(loai) \end{array}\right. \Rightarrow C(5;1)$$

B là hình chiếu của C lên đt $BD \Rightarrow B(3;3)$

Mà AB= 2 nên A thuộc đường tròn có PT $(x-3)^2+(y-3)^2=4 \ (1)$

Tam giác ABD vuông cân tại A => góc ABD= 45^0=> PT của AB là x= 3 hoặc y= 3.

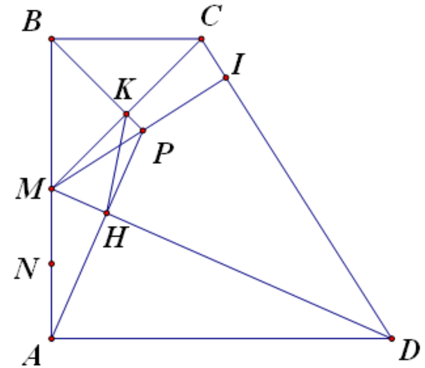
Với x= 3 thế vào (1) giải ra y =1 hoặc y= 5 => A(3; 1) thử lại không thỏa; A(3; 5) thỏa.

Với y= 3 thế vào (1) giải ra x =1 hoặc x= 5 => A(1; 3) thỏa; A(5; 3) không thỏa.

Bài 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD. Điểm M là trung điểm cạnh AB, điểm $N\left(0;\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của MA. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên MD và MC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD biết điểm M nằm trên đường thẳng $d: 2x-y-3=0$, hai đường thẳng AH và BK cắt nhau tại $P\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$ ***(Đề thi thử THPT Cù Huy Cận Hà Tĩnh 2016 Lần 2)***

Giải

Chứng minh: $MP \perp CD$



Do $\triangle MAD$ vuông tại A và $\triangle MBC$ vuông tại B

$\rightarrow \begin{cases} AM^2 = MH.MD \\ BM^2 = MK.MC \end{cases}$, do $MA = MB$

$\rightarrow MH.MD = MK.MC \Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MK}{MD}(1)$

Mặt khác: $\widehat{HMK} = \widehat{CMD}(2)$

Từ (1), (2) → $\triangle MHK \sim \triangle MCD \rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{CDM} = \widehat{IDM}(3)$

MHPK nội tiếp → $\widehat{MKH} = \widehat{MPH}(4)$

Từ (3), (4) → $\widehat{IDM} = \widehat{MPH}(5)$. Mà $\widehat{HMP} + \widehat{MPH} = 90^0(6)$

Từ (5), (6)→ $\widehat{HMP} + \widehat{IDM} = 90^0 \rightarrow \widehat{MID} = 90^0 \rightarrow MP \perp CD$

Ta có: $MP: x + 3y + 2 = 0$

→Tọa độ M thỏa mãn: $\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow M(1;\ -1) \rightarrow A(-1;\ -2)$

Do M là trung điểm AB nên $B(3;\ 0)$

Lại có: $AD: 2x + y + 4 = 0 \rightarrow AD \cap CD \rightarrow D(2;\ -8)$

$BC: 2x + y - 6 = 0 \rightarrow BC \cap CD \rightarrow C(4;\ -2)$

Vậy $A(-1;\ -2)$, $B(3;\ 0)$, $C(4;\ -2)$, $A(2;\ -8)$

Bài 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và B có $2BC = 3AD$. Gọi M là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật BADM, P là giao điểm của AN với BD và N là điểm trên cạnh BM sao cho $BM = 4MN$. Biết $N(-1;-2), P\left(\dfrac{11}{7};\dfrac{1}{7}\right)$ và $\sin MAD = \dfrac{5}{\sqrt{89}}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.



(Đề thi thử THPT Nguyễn Khuyến TP Hồ Chí Minh 2016 Lần 3)

Giải

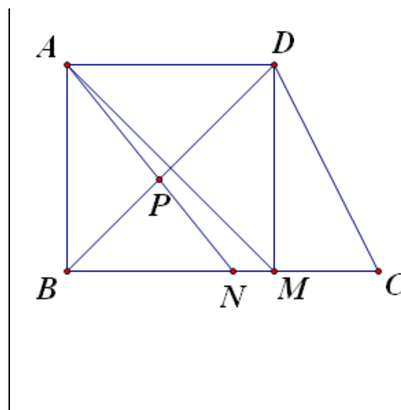
$\Delta PDA \sim \Delta PBN \Rightarrow \dfrac{PA}{PN} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow A(5;-3)$

$AN: 5x - 6y - 7 = 0 \Rightarrow k_1 = \dfrac{5}{6}$

$BN: y = k_2(x+1) - 2$

Theo giả thiết có: $\sin MAD = \dfrac{5}{\sqrt{89}} \Rightarrow \tan MAD = \dfrac{5}{8}$

và tam giác MAD vuông tại D



→ $\dfrac{AB}{BN} = \dfrac{5}{6}$

Xét tam giác vuông ANB, theo công thức góc của 2 đường thẳng ta có:

$$\tan ANB = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_2 = 0 \\ k_2 = \dfrac{60}{11} \end{array}\right.$$

Xét từng trường hợp, tìm B, C, D

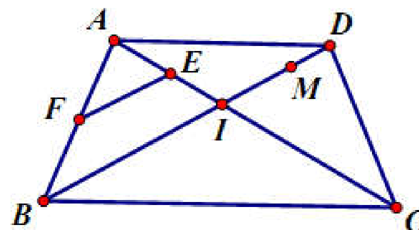
→ $A(5;3), B(-7;-2), C(5;-2), D(-3;3)$

Bài 14: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD(AD//BC)$ có phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 3 = 0$ và đường thẳng $AC: y - 2 = 0$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang cân ABCD, biết $IB = \sqrt{2}IA$, hoành độ điểm I: $x_I > -3$ và $M(-1;3)$ nằm trên đường thẳng BD.

(Đề thi thử THPT Tôn Đức Thắng 2016 Lần 2)

Giải





Ta có A là giao điểm của AB và AC nên $A(1;2)$

Lấy điểm $E(0;2)\in AC$. Gọi $F(2a-3;a)\in AB$ sao cho $EF//BD$

Khi đó $\frac{EF}{BI}=\frac{AE}{AI}\Leftrightarrow\frac{EF}{AE}=\frac{BI}{AI}=\sqrt{2}\Leftrightarrow EF=\sqrt{2}AE$

$$\Leftrightarrow(2a-3)^2+(a-2)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=\frac{11}{5}\end{array}\right.$$

Với $a=1$ thì $\overrightarrow{EF}=(-1;-1)$ là vtcp của đường thẳng BD

Nên chọn vtpt của BD là $\vec{n}=(1;-1)$. Pt

$BD:x-y+4=0\Rightarrow BD\cap AC=I(-2;2)\qquad BD\cap AB=B(-5;-1)$

Ta có $\overrightarrow{IB}=-\frac{IB}{ID}\overrightarrow{ID}=-\frac{IB}{IA}\overrightarrow{ID}=-\sqrt{2}\overrightarrow{ID}\Rightarrow D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2;\frac{3}{\sqrt{2}}+2\right)$

$\overrightarrow{IA}=-\frac{IA}{IC}\overrightarrow{IC}=-\frac{IA}{IB}\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{IC}\Rightarrow C\left(-3\sqrt{2}-2;2\right)$

Với $a=\frac{11}{5}$ thì $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right)$ là vtcp của đường thẳng BD. Nên chọn vtpt của BD là $\vec{n}=(1;-7)$

Do đó $BD:x-7y+22=0\Rightarrow I(-8;2)$ (loại)

Bài 15.*(Đề thi thử THPT Group Thầy Mẫn Ngọc Quang Lần 3)*

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thang vuông *ABCD* vuông tại *A* và *B* có phương trình cạnh $CD:x+3y+5=0$. Gọi *M* là trung điểm *AB*, *H* là chân các đường vuông góc kẻ từ *A* đến *MD*, K là chân đường vuông góc kẻ từ *B* đến *MC*, đường thẳng *AH* cắt đường thẳng *BK* tại $N\left(\frac{2}{3};2\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang *ABCD* biết điểm *M* thuộc $d:4x-y-1=0$ và trung điểm *E* của *MB* có tọa độ $E\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải:



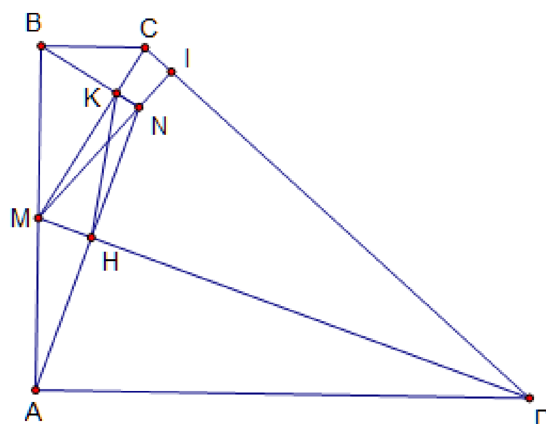
Ta có ΔAMD vuông tại *A*, *AH* là đường cao

$\Rightarrow AM^2 = MH.MD$

ΔBMC vuông tại $B \rightarrow BM^2 = MK.MC$

Mà $AM=BM$ do đó $MH.MD = MK.MC$

Xét ΔMKH và ΔMDC ta có:



$$\begin{cases} \widehat{KMH} : \ chung \\ \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MK}{MD} \end{cases} \rightarrow \Delta MHK \sim \Delta MDC$$

$\rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{IDH}$

Tứ giác *MKNH* có

$\widehat{MKN} + \widehat{MHN} = 90^o + 90^o = 180^o \rightarrow MKNH$ nội tiếp $\rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MNH}$

Ta có $\widehat{MNH} = \widehat{IDH} \left(= \widehat{MKH} \right) \rightarrow$ Tứ giác *HNID* nội tiếp $\rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{NHD} = 90^o \rightarrow MN \perp CD$

Phương trình đường thẳng *MN* qua *N* vuông góc *CD* là $MN : 3x - y = 0$

Tọa độ *M* là nghiệm hệ $\begin{cases} 4x - y - 1 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \rightarrow M(1;3)$

Vì *E* là trung điểm $MB \rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_E - x_M \\ y_B = 2y_E - y_M \end{cases} \rightarrow B(-1;2)$

Vì *M* là trung điểm $AB \rightarrow \begin{cases} x_A = 2x_M - x_B \\ y_A = 2y_M - y_B \end{cases} \rightarrow A(3;4)$

Phương trình cạnh *AD* là $AD : 2x + y - 10 = 0 \rightarrow D(7;-4)$

Phương trình cạnh *BC* là $BC : 2x + y = 0 \rightarrow C(1;-2)$

Vậy $A(3;4); B(-1;2); C(1;-2); D(7;-4)$ là các điểm cần tìm.

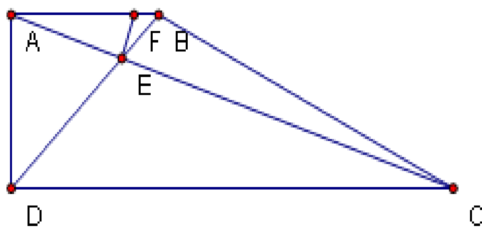
Bài 16 CHUYÊN VINH LẦN 2 :



Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, AB=AD=$\frac{1}{3}$CD. Gọi giao điểm của AC và BD là E(3;–3) , điểm F(5;–9) thuộc cạnh AB sao cho AF=5FB. Tìm tạo độ đỉnh D biết y_A<0.

Cách 1 : Dùng phương pháp vecto :

Lời giải:



Đặt:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a};\quad \overrightarrow{AD}=\vec{b}\quad \left(\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=x;\ \vec{a}.\vec{b}=0\right)$$

$$=>\overrightarrow{AF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\vec{a};\quad \overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}=3\vec{a}$$

Do AB//CD => ΔABE ~ ΔCDE (g-g)

$$=>\frac{EA}{EC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{3}=>\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

$$=>\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{5}{6}\vec{a}-\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=\frac{1}{12}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$$

$$=>\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{12}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right)=\frac{1}{16}\vec{a}^2-\frac{1}{16}\vec{b}^2-\frac{1}{6}\vec{a}.\vec{b}=0$$

$$=>AE\perp EF=>\frac{EF}{AE}=\tan\widehat{EAF}=\tan\widehat{ECD}=\frac{AD}{DC}=\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{EF}(2;-6)=>\begin{cases}AE=3EF=6\sqrt{10}\\ AE:x-3y-12=0\end{cases}$$

Gọi A(3m+12;m) (m<0) ta có:

$$\overrightarrow{AE}(-3m-9;-m-3);\ AE=6\sqrt{10}=>\left[\begin{array}{ll}m=3 & (\text{k tm})\\ m=-9 & (\text{tm})\end{array}\right.=>A(-15;-9)$$

$$=>\begin{cases}\overrightarrow{AF}(20;0)\\ \overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AE}\end{cases}=>\begin{cases}AD:x+15=0\\ C(57;15)\end{cases}$$

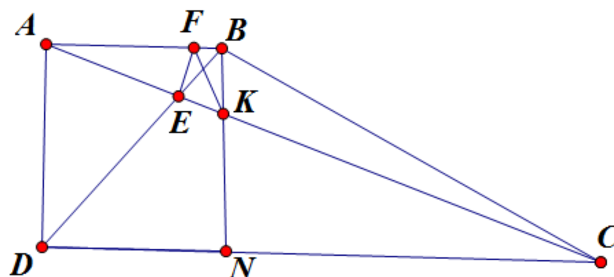
$$CD//AB=>CD:y-15=0$$

$$D=AD\cap CD=>D(-15;15)$$



Vậy D(–15;15)

Cách 2 : Dùng các tỉ lệ đồng dạng



Kẻ BN vuông góc DC , K là giao của AC và BN , ta có

$$\frac{AB}{CD}=\frac{BE}{ED}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{BE}{ED}=\frac{EK}{AK}=\frac{1}{3}\Rightarrow AE=\frac{3}{4}AK$$

$$Co:\frac{BK}{AD}=\frac{BE}{ED}=\frac{1}{3}\Rightarrow BK=\frac{1}{3}AD=\frac{1}{3}AD\Rightarrow AK=\frac{\sqrt{10}}{3}AB$$

$$\Rightarrow AK.AE=\frac{3}{4}AK^2=\frac{5}{6}AB^2$$

Dùng phương tích : $AF.AB=AK.AE(=\frac{5}{6}AB^2)\Rightarrow BFEK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEK}=90^O$

Do $\widehat{FBK}=\widehat{EKF}=45^o$

$\Rightarrow FEK$ **vuông cân tại E**

$\Rightarrow EF:3x+y-9=0$

$\Rightarrow AC:x-3y-12=0$

$EF=2\sqrt{10}\Rightarrow AE=6\sqrt{10}\Rightarrow A(15,-9)$

$3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EC}\Rightarrow C(-33,15)$

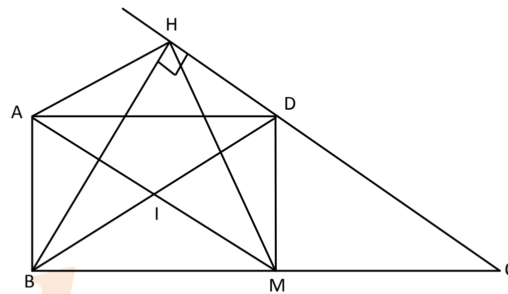
$AB:y=-9\Rightarrow AD:x=-15,CD:y=15$

$\Rightarrow D(-15,15)$



Bài 17 MERI TP HỒ CHÍ MINH

Câu 7. (*1,0 điểm*) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $BC = 2AD$, đỉnh $A(-3;1)$ và trung điểm của đoạn BC nằm trên đường thẳng $d: x - 4y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$, biết $H(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng CD.



- Từ giả thiết ta có $ABMD$ là hình chữ nhật.

  Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp $ABMD$.

- $BH \perp DH \Rightarrow H \in (C) \Rightarrow HA \perp HM$ (*)

- $M \in d: x - 4y - 3 = 0 \Rightarrow M(4m+3\,;\,m)$

- $\overrightarrow{AH} = (9;-3)$, $\overrightarrow{HM} = (4m-3\,;\,m+2)$

- Ta có: (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HM} = 0$

$\Leftrightarrow 9(4m-3) - 3(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Suy ra: $M(7;1)$.

- $ADCM$ là hình bình hành

  $\Rightarrow$ đi qua $H(6;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (10;0)$

  $\Rightarrow$ Phương trình $DC: y + 2 = 0$.

- $D \in DC: y + 2 = 0 \Rightarrow D(t\,;-2)$

- $\overrightarrow{AD} = (t+3\,;-3)$, $\overrightarrow{MD} = (t-7\,;-3)$

- $AD \perp DM \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MD} = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-7) + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \Rightarrow D(-2;-2) \\ t = 6 \Rightarrow D(6;-2) \equiv H(loại) \end{array}\right.$

- Gọi $I = AM \cap BD \Rightarrow I$ là trung điểm $AM \Rightarrow I(2;1)$

- I là trung điểm $BD \Rightarrow B(6;4)$



- M là trung điểm $BC \Rightarrow C(8;-2)$
- Vậy: $B(6;4)$, $C(8;-2)$, $D(-2;-2)$.

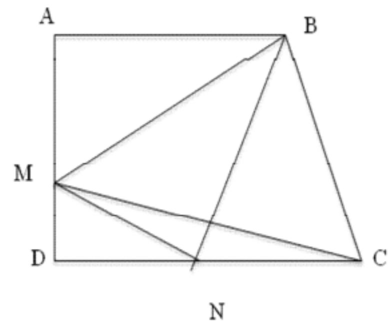
Câu 18 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $AB = AD < CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình là $y-2=0$. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M. Đường phân giác trong góc $\widehat{MBC}$ cắt cạnh DC tại N. Biết rằng đường thẳng MN có phương trình $7x-y-25=0$. Tìm tọa độ đỉnh D.

Tứ giác BMDC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BDC} = \widehat{DBA} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại B, BN là phân giác trong $\widehat{MBC}$

$\Rightarrow M, C$ đối xứng qua BN



$\Rightarrow AD = d(B, CN) = d(B, MN) = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

$AB = AD \Rightarrow BD = AD\sqrt{2} = 4$

$BD: y-2=0 \Rightarrow D(a;2)$, BD=4 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-3 \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là: $D(5;2)$ hoặc $D(-3;2)$

Câu 19 (Sở GD – Bắc Giang – Lần 4) Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và B có AB = BC= 2CD. Gọi M là trung điểm cạnh BC, điểm H$\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)$ là giao điểm của BD và AM. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang, biết phương trình cạnh AB: x – y +4 = 0 và A có hoành độ âm.

Đáp số :A(-4; 0); B(0;4); C(4;0); D(2;-2).

Đặt BC = a

Ta có AM = $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos BAM = \frac{BA}{AM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Gọi VTPT của đt AM là $\vec{n}(m;n) \Rightarrow \cos(AM;AB) = \dfrac{|m-n|}{\sqrt{(m^2+n^2)(1+1)}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3n \\ m=\dfrac{-n}{3} \end{array}\right.$$

TH1: m = -3n có đt AM: 3x- 4y $-\dfrac{4}{5}=0$ suy ra tọa độ điểm A$\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{32}{5}\right)$(Loại)

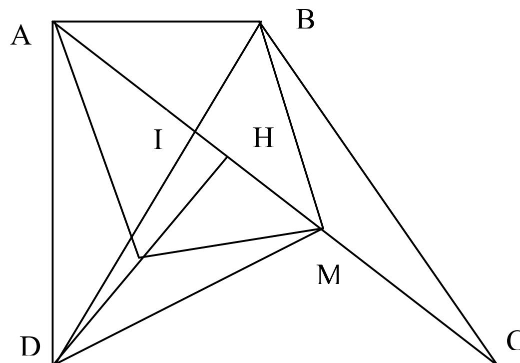
TH2: $m=-\dfrac{n}{3}$ có đt AM: x – 3y + 4 = 0 suy ra tọa độ điểm A(-4; 0)

ĐT (BH): 3x+y – 4 = 0 suy ra tọa độ điểm B(0 ; 4) => đt BC: x+y – 4 = 0=> M(2;2)

=>C(4;0). Sử dụng $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ =>D(2; - 2). KL: …

Câu 20 (Thpt – Quảng Xương 4 – Thanh Hoá) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, D(2; 2) và CD = 2AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AC. Điểm $M\left(\dfrac{22}{5};\dfrac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định các tọa độ các điểm A, B, C của hình thang biết B thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y+4=0$.

Đáp số :A(2;4); B(4;4); C(6;2).





Gọi E là trung điểm DH ta thấy ABME là hình bình hành nên $ME \perp AD$, nên E là trực tâm tam giác ADM $\Rightarrow AE \perp MD$ mà $AE \perp BM$ nên $DM \perp DM$

Từ đó suy ra phương trình $BM: 3x + y = 16$

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$

Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{IB}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow I(\frac{10}{3};\frac{10}{3})$

Phương trình đường thẳng $AC: x + 2y = 10$

Phương trình đường thẳng $DH: 2x - y = 2$ suy ra tọa độ $H(\frac{14}{5};\frac{18}{5})$ suy ra tọa độ $C(6;2)$

Từ $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IA} \Rightarrow A(2;4)$

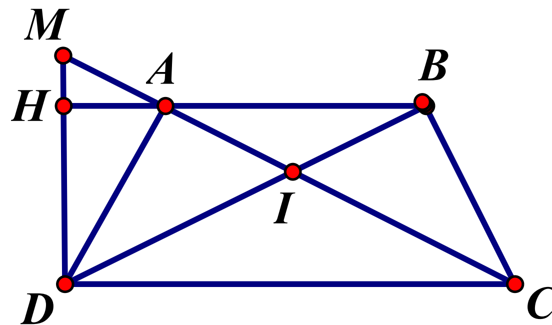
Câu 21 (Thpt – Nguyễn Viết Xuân – Phú Yên) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD $\left(\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^0\right)$ có đỉnh $D(2;2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D lên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C, biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 4 = 0$.

Đáp số : A(2;4); B(4;4); C(6;2).

Câu 22 (Thpt – Trần Phú) Cho hình thang cân ABCD có AB // CD, CD = 2AB. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là điểm đối xứng của I qua A với $M\left(\frac{2}{3};\frac{17}{3}\right)$. Biết phương trình đường thẳng DC : x + y – 1= 0 và diện tích hình thang ABCD bằng 12. Viết phương trình đường thẳng BC biết điểm C có hoành độ dương.

Đáp số : 3x – y – 7 = 0





Ta có : tam giác MDC vuông tại D

=>(MD) : x – y + 5 = 0 => D(-2; 3)

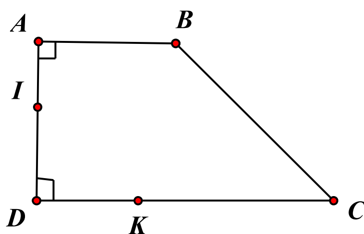
MD = $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ => HD = $\frac{3}{4}$MD = $2\sqrt{2}$ Gọi AB = a => S_{ABCD} = $\frac{3a.2\sqrt{2}}{2}$ = 12 => a = $2\sqrt{2}$

=>DC = $4\sqrt{2}$ Gọi C(c; 1 –c) => $DC^2 = 2(c + 2)^2$ => c = 2 hay c = -6 (loại)=>C(2; -1)

=>B(3; 2)=> (BC): 3x – y – 7 = 0

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D; diện tích hình thang bằng 6; $CD = 2AB$, $B(0;4)$. Biết điểm $I(3;-1), K(2;2)$ lần lượt nằm trên đường thẳng AD và DC. Viết phương trình đường thẳng AD biết AD không song song với các trục tọa độ.

Giải:



Vì AD không song song với các trục tọa độ nên gọi vecto pháp tuyến của AD là

$\vec{n} = (1;b), b \neq 0$1 suy ra: Phương trình $AD: 1(x-3)+b(y+1)=0$

Phương trình $AB: bx-(y-4)=0$



$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}.AD=\frac{3AB}{2}.AD=\frac{3}{2}d\left(B,AD\right).\mathrm{d}\left(K,AB\right)\ =\frac{3}{2}.\frac{\left|-3+5b\right|}{\sqrt{b^2+1}}.\frac{\left|2b+2\right|}{\sqrt{b^2+1}}$$

$$S_{ABCD}=6\Leftrightarrow 3\frac{\left|-3+5b\right|}{\sqrt{b^2+1}}.\frac{\left|b+1\right|}{\sqrt{b^2+1}}=6\Leftrightarrow\left|5b-3\right|.\left|b+1\right|=2\left(b^2+1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\ b=-\frac{5}{3}\\ b=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}}{7}\end{array}\right.$$

Đáp số: $x+y-2=0;3x-5y-14=0;7x-\left(1+2\sqrt{2}\right)y-2\sqrt{2}-22=0;7x-\left(1-2\sqrt{2}\right)y+2\sqrt{2}-22=0$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết $A\left(1;0\right),B\left(0;2\right)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Giải:

Ta có: Đường thẳng AB có phương trình: $2x+y-2=0$

Vì I nằm trên đường thẳng $y=x$ nên giả sử $I\left(t;t\right)$

Suy ra $C\left(2t-1;2t\right),D\left(2t;2t-2\right)$

Mặt khác, $S_{ABCD}=AB.d\left(C,AB\right)=4\Rightarrow d\left(C,\mathrm{AB}\right)=\frac{4}{\sqrt{5}}\ \Leftrightarrow\left|3t-2\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{4}{3}\end{array}\right.$

Vậy $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right),D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ hoặc $C\left(-1;0\right),D\left(0;-2\right)$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD có đường cao AD. Biết $BC=2AB$, $M\left(0;4\right)$ là trung điểm của BC và phương trình đường thẳng AD là: $x-2y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang biết rằng hình thang có diện tích bằng $\frac{54}{5}$ và A, B có tọa độ dương.

Giải:



Gọi N là hình chiếu của M trên đường thẳng $AD \Rightarrow N\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right) \Rightarrow MN = \frac{9}{\sqrt{5}}$

Ta có $S_{ABCD} = MN.AD = \frac{54}{5} \Rightarrow AD = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow AN = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{\sqrt{5}}$

Gọi $A(2t+1;1), t>0$. Với $AN = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left(2t+1-\frac{9}{5}\right)^2 + \left(t-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{5}\end{array}\right.$

Theo giả thiết thì: $A(3;1), D\left(\frac{9}{5};-\frac{1}{5}\right)$

AB vuông góc với AD nên PT tham số đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 3+b \\ y = 1-2b \end{cases}$

Gọi $B(3+b;1-2b), -3 < b < \frac{1}{2}$

Ta lại có $BM = BA \Leftrightarrow \sqrt{(3+b)^2+(3+2b)^2} = \sqrt{b^2+(b-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=-\frac{17}{3}\end{array}\right. \Rightarrow B(2;3)$

M là trung điểm của BC nên $C(-2;5)$. Vậy $A(3;1), B(2;3), C(-2;5), D\left(\frac{9}{5};-\frac{1}{5}\right)$

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD có đáy lớn $CD = 3AB, C(-3;-3)$, trung điểm của AD là $M(3;1)$. Tìm tọa độ đỉnh B biết $S_{BCD} = 18, AB = \sqrt{10}$ và đỉnh D có hoành độ nguyên dương.

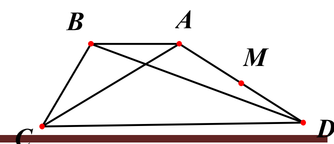
Giải:

Gọi $\vec{n} = (A;B)$ là vectơ pháp tuyến của CD $\left(A^2+B^2>0\right)$

$\Rightarrow CD: A(x+3)+B(y+3)=0 \Leftrightarrow Ax+By+3A+3B=0$

Ta có: $S_{BCD} = S_{ACD} = 18$

$\Rightarrow d(A;CD) = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{36}{3\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \Rightarrow d(M;CD) = \frac{3\sqrt{10}}{5}$





$\Leftrightarrow \dfrac{|3A+B+3A+3B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow 5|6A+4B|=3\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}$

$\Leftrightarrow 25\left(36A^2+48AB+16B^2\right)=90\left(A^2+B^2\right)$

$\Leftrightarrow 810A^2+1200AB+310B^2=0 \Leftrightarrow A=\dfrac{-B}{3}$ *hay* $A=-\dfrac{31B}{27}$

* $A=-\dfrac{B}{3}$: Chọn $B=-3 \Rightarrow A=1 \Rightarrow (CD): x-3y-6=0 \Rightarrow D(3d+6;d)$

Ta có: $CD^2=90 \Leftrightarrow (3d+9)^2+(d+3)^2=90 \Leftrightarrow (d+3)^2=9 \Leftrightarrow d=0$ hay $d=-6$

$\Rightarrow D(6;0)$ (nhận) hay $D(-12;-6)$ (loại). Vậy $D(6;0) \Rightarrow A(0;2)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}=(-3;-1) \Rightarrow B(-3;1)$

* $A=-\dfrac{31B}{27}$: Chọn $B=-27 \Rightarrow A=31 \Rightarrow CD: 31x-27y+12=0$

$\Rightarrow D\left(d;\dfrac{31d+12}{27}\right) \Rightarrow CD^2=(d+3)^2+\left(\dfrac{31d+93}{27}\right)^2=90 \Rightarrow (d+3)^2=\dfrac{729}{169}$ (loại)

Vậy $B(-3;1)$

Câu 26: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có diện tích bằng $\dfrac{45}{2}$, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng $x-3y-3=0$. Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại $I(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC, biết điểm C có hoành độ dương.

Giải:

Do ABCD là hình thang cân với đáy lớn CD và hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau nên tam giác ICD vuông cân tại I.

Đường thẳng qua I vuông góc với $CD: x-3y-3=0$ có phương trình:

$3(x-2)+(y-3)=0 \Leftrightarrow 3x+y-9=0$

Gọi K là trung điểm của CD, ta có tọa độ K là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} x-3y-3=0 \\ 3x+y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow K(3;0)$$

Mà $KI = KC = KD$ nên C, D là giao điểm của đường thẳng CD và đường tròn tâm K bán kính $KI = \sqrt{10}$

Do đó tọa độ của chúng là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y-3=0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow C(6;1), D(0;-1)$ do C có hoành độ dương.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có

$$\frac{45}{2} = S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{45}{2} = \frac{1}{2}(AB+CD).HK = (IH+IK).HK = \left(IH+\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

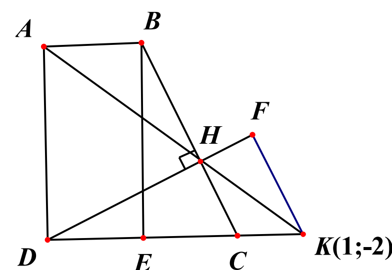
Mà $\frac{ID}{IB} = \frac{IK}{IH} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B(3;5) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (3;-4)$

Vậy đường thẳng $BC: 4(x-3)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-27=0$

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có đáy là AD và BC; biết $AB = BC, AD = 7$. Đường chéo AC có phương trình $x-3y-3=0$; điểm $M(-2;-5)$ thuộc đường thẳng AD. Viết phương trình đường thẳng CD biết rằng đỉnh $B(1;1)$.

Giải:

Gọi $D = (2+4t;-2+3t) \in AD$



Do

$AD = 7 \Rightarrow AD^2 = 49 \Leftrightarrow (4t-4)^2 + (3t-3)^2 = 49 \Leftrightarrow 25(t-1)^2 = 49$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 = \frac{49}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=\frac{7}{5} \\ t-1=-\frac{7}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{12}{5} \\ t=-\frac{2}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = \left(\frac{58}{5};\frac{26}{5}\right) \\ D_2 = \left(\frac{2}{5};-\frac{16}{5}\right) \end{array}\right.$$

Tuy nhiên, điểm B và điểm D luôn nằm về 2 phía của đường thẳng AC do đó kiểm tra vị trí tương đối của điểm B và 2 điểm D đó ta thấy điểm D_2 thỏa mãn.



Do đó $D=\left(\frac{2}{5};-\frac{16}{5}\right)$

+ Do BC//AD nên phương trình đường thẳng BC là: $3x-4y+1=0$

Điểm $C=BC\cap AC\Rightarrow$ tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x-4y+1=0\\ x-3y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=-2\end{cases}\Rightarrow C(-3;-2)$$

Tuy nhiên ta tính được $AB=5, CD=\sqrt{13}\Rightarrow ABCD$ không phải là hình thang cân, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy bài toán vô nghiệm.

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, D có $AD=DC=2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên cạnh BC; I là trung điểm của AH; đường thẳng AI cắt DC tại $K(1;-2)$. Tìm tọa độ các điểm D, C biết $DH: x-2y-3=0$ và D có tung độ nguyên.

Giải:

+ Kẻ BE vuông góc với DC tại E

$\Rightarrow EC=DE=AB, \widehat{HDC}=\widehat{EBC}$

+ Kẻ KF vuông góc với DH tại F. $KF=d(K,DH)=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\tan\widehat{HDC}=\tan\widehat{EBC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\widehat{HDC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow KD=\frac{KF}{\sin\widehat{HDC}}=2$

+ $D\in DH\Rightarrow D(2d+3;d), d\in\mathbb{Z}; DK=\sqrt{(2d+2)^2+(d+2)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-2\\ d=-\frac{2}{5}\end{array}\right.$

Vì $d\in\mathbb{Z}\Rightarrow d=-2\Rightarrow D(-1;-2)$

Đặt $AB=a(a>0)\Rightarrow CD=2a; CE=a$

$CH=CD.\sin\widehat{HDC}=\frac{2a}{\sqrt{5}}; BC=EC.\sin\widehat{EBC}=a\sqrt{5}\Rightarrow BH=\frac{3a}{\sqrt{5}}$



$\frac{CK}{AB}=\frac{HC}{HB}=\frac{2}{3}\Rightarrow CK=\frac{2a}{3}\Rightarrow DK=\frac{8a}{3}\Rightarrow KD=4KC$

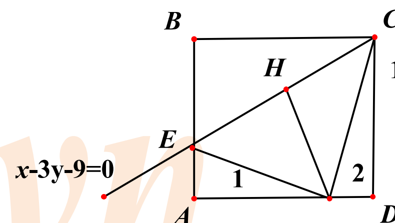
$\overrightarrow{KD}=4\overrightarrow{KC}\Rightarrow C\left(\frac{1}{2};-2\right)$. KL…

Câu 29: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có E, F lần lượt thuộc các đoạn AB, AD sao cho $EB=2EA;FA=3FD,F(2;1)$ và tam giác CEF vuông tại F. Biết đường thẳng $x-3y-9=0$ qua hai điểm C, E. Tìm tọa độ điểm C biết C có hoành độ dương.

Giải:

ΔAEF và ΔDFC có $\widehat{F_1}=\widehat{C_1}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{F_2}$), $\widehat{A}=\widehat{D}=90^0\Rightarrow\Delta AEF\sim\Delta DFC$

$\Rightarrow\frac{AE}{DF}=\frac{AF}{DC}=\frac{EF}{FC}$ mà $AE=\frac{AB}{3}$



$DF=\frac{AD}{4},AF=\frac{3AD}{4}\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{3}{4}$. Do đó

$\frac{EF}{FC}=\frac{AE}{DF}=I\Rightarrow EF=FC\Rightarrow\Delta EFC$ vuông cân tại F.

Gọi H là hình chiếu của F trên EC. Khi đó $CF=\sqrt{2}FH=\sqrt{2}d(F,CE)=2\sqrt{5}$

Gọi $C(3t+9;t)$ với $t>-3$ (vì $x_C>0$). Ta có: $CF=2\sqrt{5}\Rightarrow CF^2=20$

$\Leftrightarrow(3t+7)^2+(t-1)^2=20\Leftrightarrow t^2+4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-3(L)\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow C(6;-1)$. Vậy $C(6;-1)$

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $CD=2AB=2AD$. Điểm $E(0;5)$ nằm trên cạnh AB, đường thẳng (d) đi qua E và vuông góc với DE cắt đường thẳng BC tại $F(3;3)$. Xác định tọa độ đỉnh C của hình thang ABCD biết D có tung độ nhỏ hơn 3 và diện tích hình thang bằng $\frac{27}{2}$.

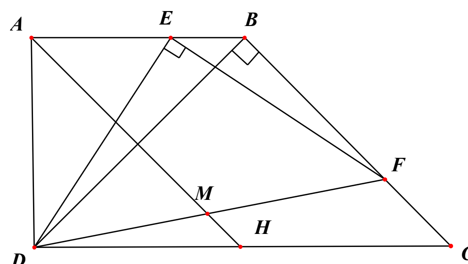
Giải:



Đặt $AB = a;(a > 0)$. Diện tích hình thang ABCD: $S = \frac{(AB + CD)AD}{2} = \frac{(a + 2a)a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

Theo giả thiết $S_{ABCD} = \frac{27}{2} \Rightarrow \frac{3a^2}{2} = \frac{27}{2} \Rightarrow a = 3(do\ a > 0)$

Ta có $AB = AD$ nên tam giác ABD vuông cân tại A.



Do đó $\angle ABD = \angle ADB = \angle BDC = 45^0$.

Gọi H là trung điểm DC.

$\Rightarrow BH = DH = HC = 3$

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại B.

Xét tứ giác BEDC có:

$\angle DEF = \angle DBF = 90^0$

$\Rightarrow DEBF$ nội tiếp một đường tròn hai đỉnh (E, B kề nhau nhìn DF một góc không đổi).

Gọi M là trung điểm DF. Do đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác DEBF.

$\Rightarrow \angle CFE = \angle ABD = 45^0 \Rightarrow \Delta FED$ vuông cân tại $E \Rightarrow ED = EF = \sqrt{13}$

Phương trình ED đi qua điểm $E(0;5)$ và nhận VTPT $EF = (3;-2): 3x - 2y + 10 = 0$

Gọi $D(2t;5+3t) \in ED \Rightarrow ED = \sqrt{13t^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow t = \pm 1$

Với $t = 1 \Rightarrow D(2;8)$ (loại)

Với $t = -1 \Rightarrow D(-2;2)$

Vì M là trung điểm DF nên $M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác DEBF: $(C):\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

Xét tam giác ABD vuông cân tại A có $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 3\sqrt{2}$

Gọi $B(x;y) \Rightarrow BD = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{2}\ hay\ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 18(1)$

Vì $B \in (C):\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}(2)$



Lấy (1) – (2) theo vế ta được $5x+y=10 \Leftrightarrow y=10-5x$. Thế vào phương trình (1):

$$(x+2)^2+(8-5x)^2=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{25}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(1;5) \\ B\left(\dfrac{25}{13};\dfrac{5}{13}\right) \end{array}\right.$$

Thử lại ta có $B(1;5)$ thỏa mãn.

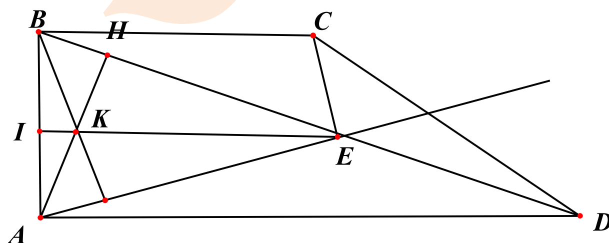
Phương trình BF qua điểm $B(1;5)$ và điểm $F(3;3): x+y-6=0$

Phương trình DC qua điểm $D(-2;2)$ nhận VTCP $\overrightarrow{EB}=(1;0): y-2=0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-6=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C(4;2)$

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và $AD=2BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x+y+3=0$ và $C\left(\dfrac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.

Giải:



Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I.

Suy ra: +) K là trực tâm của tam giác ABE, nên $BK \perp AE$

+) K là trung điểm của AH nên $KE // = \dfrac{1}{2} AD$ hay $KE // = BC$

Do đó: $CE \perp AE \Rightarrow CE: 2x-8y+27=0$



Mà $E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};3\right)$, mặt khác E là trung điểm của HD nên $D\left(-2;3\right)$

Khi đó $BD: y-3=0$ suy ra $AH: x+1=0$ nên $A\left(-1;1\right)$

Suy ra $AB: x-2y+3=0$. Do đó: $B\left(3;3\right)$

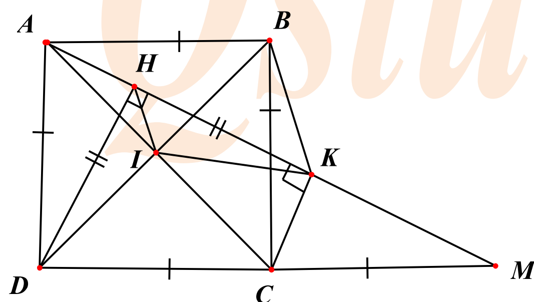
KL: $A\left(-1;1\right), B\left(3;3\right)$ và $D\left(-2;3\right)$

Câu 32: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD tâm I. Đỉnh B thuộc đường thẳng $d: 5x+3y-10=0$. Gọi M là điểm đối xứng với D qua C. Điểm H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và C lên AM. Xác định tọa độ điểm B biết $K\left(1;1\right)$ và đường thẳng HI có phương trình là $3x+y+1=0$.

Giải:

Ta có: +) ΔBKD vuông tại B đường kính BD

+) ΔBCD và ΔBAD lần lượt vuông tại C và A đường kính BD



Do đó: 5 điểm A, B, K, C, D cùng thuộc đường tròn tâm I đường kính BD và AC (do ABCD là hình vuông)

Do đó $BAD = 90^0 \Rightarrow BK \perp DK\left(1\right)$

Ta có: $HBD = AKD = 45^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

$\Rightarrow \Delta HDK$ vuông cân tại H (vì $DHK = 90^0$). Suy ra $HK = HD$

Ta lại có: ΔBKD vuông tại B đường kính $BD \Rightarrow IK = ID$

Do đó HI là đường trung trực của DK, do đó $HI \perp DK\left(2\right)$



Từ (1) và (2) ta suy ra $HI//BK$

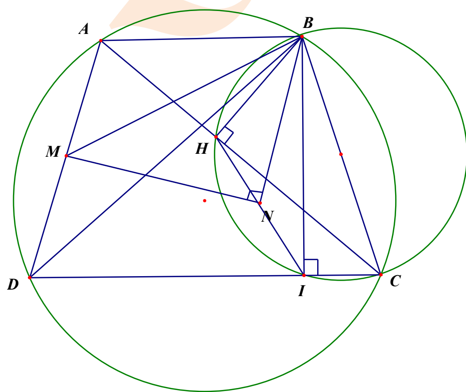
Đường thẳng BK đi qua $K(1;1)$ và song song với $HI: 3x+y+1=0$ có phương trình: $3x+y-4=0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}3x+y-4=0\\5x+3y-10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Kết luận: Vậy điểm $B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Câu 33: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD (AB//CD). Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên các đường thẳng AC, CD và M, N lần lượt là trung điểm AD, HI. Viết phương trình đường thẳng AB biết $M(1;-2), N(3;4)$ và đỉnh B nằm trên đường thẳng $x+y-9=0$, $\cos\widehat{ABM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Giải:



Xét ΔABD và ΔHBI có: $\begin{cases}ABD=HCI=HBI\\ADB=ACB=HIB\end{cases}$

Suy ra tam giác ABD đồng dạng với tam giác HBI (g.g)

Ta có: BM, BN lần lượt là hai đường trung tuyến của tam giác ABD, HBI.



Do đó: $\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{BA}{BH}(1)$

Lại có: $ABM = HBN \Rightarrow MBN = ABH\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác ABH đồng dạng với tam giác MBN.

Do đó $MNB = AHB = 90^0$, hay MN vuông góc NB.

+) Đường thẳng BN đi qua $N\left(3;4\right)$ và có VTPT $\vec{n}=\overrightarrow{MN}=\left(1;3\right)$ nên có phương trình: $x+3y-15=0$

+) Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x+3y-15=0\\x+y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}\Rightarrow B\left(6;3\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MB}=\left(5;5\right)//\left(1;1\right)$, gọi $\overrightarrow{n_{AB}}=\left(a;b\right)$ là VTPT của AB, ta có:

$$\frac{\left|a+b\right|}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}=\frac{2}{\sqrt5}\Leftrightarrow 5\left(a+b\right)^2=8\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3b\\a=\dfrac{b}{3}\end{array}\right.$$

+) TH1: Nếu $a=3b$, chọn $a=3\Rightarrow b=1$. Phương trình đường thẳng $AB:3x+y-21=0$

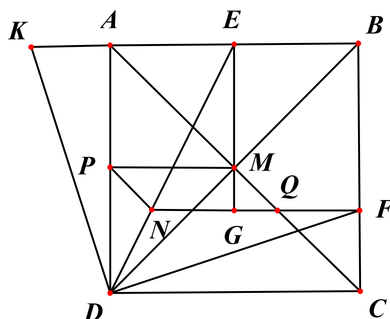
+) TH2: Nếu $a=\dfrac{b}{3}$, chọn $a=1\Rightarrow b=3$. Phương trình đường thẳng $AB:x+3y-15=0$ (loại do trùng với BN).

<u>Kết luận:</u> Vậy phương trình đường thẳng AB là $3x+y-21=0$

Câu 34: Cho hình vuông ABCD có tọa độ $B\left(3;3\right)$. Các điểm E, F lần lượt thuộc cạnh AB, BC sao cho $EF = AE + CF$. Dựng hình chữ nhật EBFG. Đường thẳng AC cắt EG tại M, DE cắt FG tại N. Dựng $MP\perp AD$ $\left(P\in AD\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ vuông ABCD, biết $N\left(-2;-1\right),P\left(-3;0\right)$, phương trình đường thẳng $AB:y-3=0$ và đường thẳng AC đi qua điểm $I\left(1;-1\right)$

Giải:





Trên tia đối của tia AB lấy điểm K sao cho AK = CF.

Gọi Q là giao điểm của AC và FN.

+) Xét ΔKAD và ΔFCD có: $\begin{cases} AK = CF \\ AD = CD \\ KAD = FCD = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta KAD = \Delta FCD\left(c.g.c\right) \Rightarrow DK = DF$

+) Xét ΔDEK và ΔDEF có: $\begin{cases} EK = EA + AK = EA + FC = EF \\ DK = DF \\ DE - chung \end{cases} \Rightarrow \Delta DEK = \Delta DEF\left(c.c.c\right)$

+) kết hợp với AE song song với NF, suy ra $FNE = KED = FED = FEN$

+) Kết hợp với $EK = EF$, suy ra $EK = EF = NF\left(1\right)$

Vì ΔABC vuông cân tại B và BA//FQ nên ΔFQC vuông cân tại F.

Kết hợp với $\Delta KAD = \Delta FCD$, suy ra $KA = FC = FQ\left(2\right)$

Từ (1) và (2), chú ý rằng AEMP là hình chữ nhật, ta suy ra:

$PM = AE = EK - KA = NF - FQ = NQ$

Kết hợp với PM//NQ, suy ra PMQN là hình bình hành.

Do đó NP//QM hay NP//AC.

Đường thẳng NP đi qua $N\left(-2;-1\right), P\left(-3;0\right)$ có phương trình là: $x + y + 3 = 0$

Đường thẳng AC song song với NP và đi qua $I\left(1;-1\right)$ là $x + y = 0$

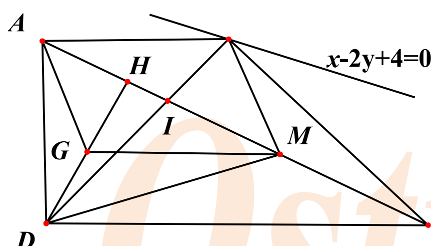


Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y-3=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow A(3;-3) \Rightarrow C(-3;3) \Rightarrow D(-3;-3)$

Kết luận: $A(3;-3), C(-3;3), D(-3;-3)$

Câu 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và $D(2;2)$ và $CD=2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm HC. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C biết đỉnh B nằm trên đường thẳng $x-2y+4=0$.

Giải:



Gọi G là trung điểm của DH. Ta có tứ giác ABME là hình bình hành

$\Rightarrow AE \perp DM \Rightarrow MD \perp BM \Rightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BM}=0$

Do $B \in x-2y+4=0 \Rightarrow B\left(a;\frac{a+4}{2}\right)$. Do đó:

$-\frac{12}{5}\left(\frac{22-5a}{5}\right)-\frac{4}{5}\left(\frac{8-5a}{10}\right)=0 \Rightarrow a=4 \Rightarrow B(4;4)$

Có: $AB//CD \Rightarrow \frac{IB}{ID}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2} \Rightarrow ID=2IB$. Đường thẳng $BD: y=x$. Do I nằm trên đường thẳng BD nên $I(b;b)$.

Do $\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{BI} \Rightarrow I\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$. Đường thẳng AC đi qua 2 điểm I và M có pt: $x+2y-10=0$. Đường thẳng DH đi qua D và vuông góc với AC có phương trình: $-2x+y+2=0$. Điểm H là giao điểm



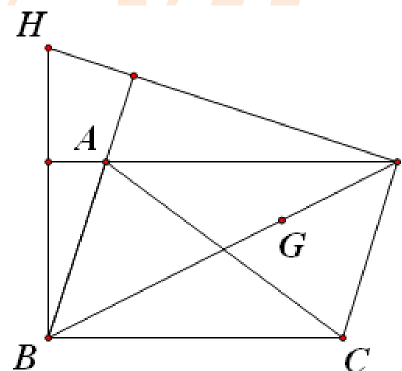
của AC và DH do đó tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} -2x+y+2=0 \\ x+2y-10=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{14}{5};\frac{18}{5}\right)$. Do M là trung điểm CH nên $C(6;2)$. Do $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A(2;4)$

HÌNH BÌNH HÀNH

Bài 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành *ABCD* có góc $\widehat{BAD}=135^0$. Trực tâm tam giác ABD là $H(-1;0)$. Đường thẳng đi qua D và H có phương trình: $x-3y+1=0$ Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành biết điểm $G\left(\frac{5}{3};2\right)$ là trọng tâm của tam giác *ADC*

(Đề Thi Thử THPT Chuyên Nguyễn Huệ 2016 Lần 2)

Giải



Ta có: $\widehat{BAD}+\widehat{BHD}=180^0 \Rightarrow \widehat{BHD}=45^0$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ là vtpt của HB

Do HB tạo với HD góc 45^0 nên

$$\cos 45^0=\frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}} \Leftrightarrow 2a^2+3ab-2b^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2a \end{cases}$$

- Nếu $a=-2b$

Chọn $a=2, b=-1$

→ Phương trình $HB: 2x-y+2=0$

$\rightarrow B(b;2b+2), D(3d-1;d)$

Do G là trọng tâm của $\triangle ADC$ nên BG = 2GD

$$\Rightarrow \overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow B(1;4), D(2;1)$$



Có: $AB: 3x + y - 7 = 0$; $AD: x + 2y - 4 = 0 \to A(2;1)$ (Loại)

- Nếu $b = 2a \to$ Phương trình $HB: x + 2y + 1 = 0$

$$B(-2b-1;b), D(3d-1;d) \Rightarrow \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-5;2), D(5;2)$$

Có: $AB: 3x + y + 13 = 0$; $AD: 2x - y - 8 = 0$. $\to A(-1;-10)$

Thử lại: $\cos ABD = \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BAD} = 45^0$ (Loại)

Vậy không tìm được tọa độ các điểm thỏa mãn

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có tâm $I\left(2\sqrt{3}-2;5\right), BC = 2AB$, góc $BAD = 60^0$. Điểm đối xứng với A qua B là $E(-2;9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD biết rằng A có hoành độ âm.

(Đề thi thử THPT Sở GD & DT Thanh Hóa 2016 Lần 1)

Giải

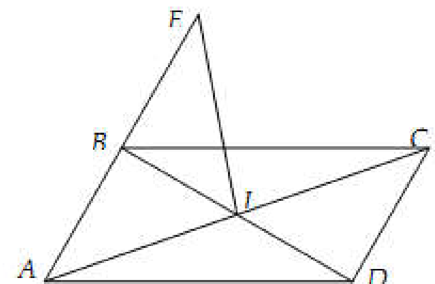
Đặt $AB = m \Rightarrow AD = 2m$.

Ta có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos 60^0 = 3m^2 \Rightarrow BD = m\sqrt{3}$

Do đó $AB^2 + BD^2 = AD^2$ nên tam giác ABD vuông tại B

nghĩa là $IB \perp AE$

$$IE^2 = IB^2 + BE^2 = \left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2 + m^2 = \frac{7m^2}{4}$$



Mặt khác $IE^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = 28$ nên ta có:

$$\frac{7m^2}{4} = 28 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow IB = \frac{m\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

Gọi $\vec{n} = (a;b)$ là vectơ pháp tuyến của AB $\left(a^2 + b^2 > 0\right)$ khi đó AB có phương trình



$a\left(x+2\right)+b\left(y-9\right)=0\Leftrightarrow ax+by+2a-9b=0$

Ta lại có $d\left(I,AB\right)=IB\Rightarrow\dfrac{\left|2\sqrt{3}a-4b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3}a-4b\right)^2=12\left(a^2+b^2\right)$

$\Leftrightarrow b\left(b-4\sqrt{3}a\right)=0\Leftrightarrow b=0,b=4\sqrt{3}a$

+ với b = 0, chọn a = 1, khi đó AB có phương trình $x+2=0$, suy ra IB có phương trình $y-5=0$. Do $B=AB\cap IB$ nên $B\left(-2;5\right)$, mà B là trung điểm của AE nên $A\left(-2;1\right)$ (thỏa mãn điều kiện $x_A<0$).

Do I là trung điểm của AC và BD nên ta suy ra $C\left(4\sqrt{3}-2;9\right),D\left(4\sqrt{3}-2;5\right)$

+ Với $b=4\sqrt{3}a$, chọn $a=1\Rightarrow b=4\sqrt{3}$, khi đó AB có phương trình $x+4\sqrt{3}y+2-36\sqrt{3}=0$, suy ra IB có phương trình $4\sqrt{3}\left(x-2\sqrt{3}+2\right)-\left(y-5\right)=0\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x-y+8\sqrt{3}-19=0$

Do $B=AB\cap IB$ nên $B\left(\dfrac{16\sqrt{3}-14}{7};\dfrac{59}{7}\right)$, mà B là trung điểm của AE nên:

$A\left(\dfrac{32\sqrt{3}-14}{7};\dfrac{55}{7}\right)$ (không thõa mãn điều kiện $x_A<0$).

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có tọa độ điểm D(5; 4). Đường trung trực của đoạn CD có phương trình $d_1:2x+3y-9=0$ và đường phân giác trong góc BAC của tam giác ABC có phương trình $d_2:5x+y+10=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành ABCD.

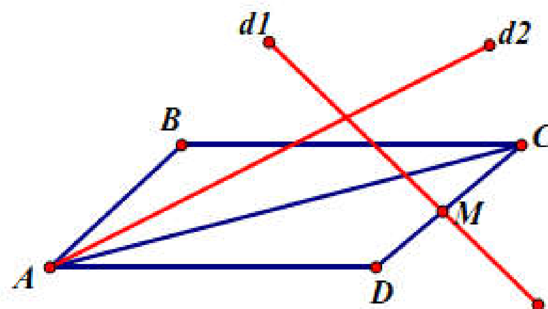
(Đề thi thử THPT Thanh Hoa Bình Phước 2016 Lần 1)

Giải

Gọi M là trung điểm của CD. Do M thuộc d1 nên $\left(m;\dfrac{-2m+9}{3}\right)$

Mặt khác: DM vuông góc với d_1 nên ta có:

$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{u_{d1}}=0\Leftrightarrow m=3$





Vậy $M(3;1) \Rightarrow C(1;-2)$

Ta lại có A thuộc d_2 nên $A(a;-5a-10)$

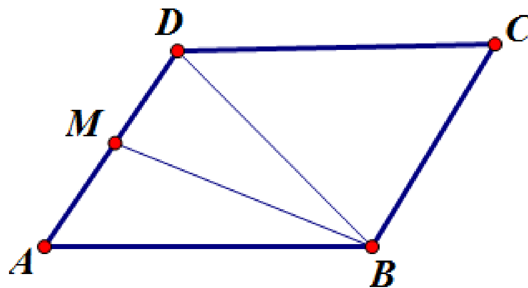
Mà ABCD là hbh nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - a = -4 \\ y_B + 5a + 10 = -6 \end{cases} \Rightarrow B(a-4;-5a-16)$

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua d2, ta có: $C'(-4;-3) \in AB$

Ta có: A, B, C' thẳng hàng $\overrightarrow{C'A} = k\overrightarrow{C'B'} \Leftrightarrow \dfrac{a+4}{a} = \dfrac{-5a-7}{-5a-13} \Leftrightarrow a = -2$

Vậy $A(-2;0)$ và $B(-6;-6)$

Bài 3 ĐỀ 20 : THẦY QUANG BABY Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD. Biết $AB = \sqrt{5}BC, \tan\widehat{BAD} = 2$ và trung điểm của cạnh AD là M(-5;-1). Tìm tọa độ đỉnh C biết rằng đường thẳng BD có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm B có tung độ dương.



*) Đặt: $BC = \dfrac{AB}{\sqrt{5}} = a$

*) Có $\tan\widehat{BAD} = 2 \Rightarrow \widehat{BAD} < 90^0 \Rightarrow \cos^2\widehat{BAD} = \dfrac{1}{\tan^2\widehat{BAD} + 1} \Rightarrow \cos^2\widehat{BAD} = \dfrac{1}{5}$

Do $BAD < 90^0 \Rightarrow \cos\widehat{BAD} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

*) $DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB.AD.\cos\widehat{BAD} = 4a^2 \Rightarrow BD = 2a$

*) Có: $BD^2 + AD^2 = 5a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta ADB$ vuông tại B



*) $d(M;\text{BD})=\dfrac{|-5+1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}\ \Rightarrow MD=\sqrt{2}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow a=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow MB=\sqrt{BD^2-MD^2}=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}=\sqrt{34}$

*) $B\in BD\Rightarrow B(b-2;\text{b})\ \Rightarrow \overrightarrow{MB}=(b+3;b+1)$

$\Rightarrow \sqrt{(b+3)^2+(b+1)^2}=\sqrt{34}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=2(nhan)\\ b=-6(l)\end{array}\right.\Rightarrow B(0;2)$

Ta sẽ tìm được C :

*) $C(c;2-c)$; $\overrightarrow{BC}(c;-c)$ mà $BC=a=2\sqrt{2}\Rightarrow \sqrt{c^2+(-c)^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=2\\ c=-2\end{array}\right.$

*) Với $c=2\Rightarrow C(2;0)$

(khác phía với M đối với đường BD nên thỏa mãn)

Với $c=-2\Rightarrow C(-2;4)$

(loại vì cùng phía M đối với bờ BD)

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có góc $\angle BAD$ tù, I là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi $E(-5;-2)$, $\text{F}\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{8}{5}\right)$ và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh CD, BC, BD. Tìm tọa độ điểm A biết rằng đường thẳng BD có phương trình $3x-5y+11=0$

(Đề thi thử THPT Group Thầy Nguyễn Tiến Chinh Lần 1)

Đáp án: Ta có $I\in 3x-5y+11=0\Rightarrow I(-2+5t;1+3t)\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IE}=3+5t;3t+3\\ \overrightarrow{IF}=\left(5t-\dfrac{21}{5};3t-\dfrac{3}{5}\right)\end{cases} t\in\mathbb{R}$

Ta có tứ giác AECF nội tiếp (do $\angle AEC+\angle AFC=180^0$ suy ra)

$IF^2=IE^2\Rightarrow 3+5t^2+3t+3^2=\left(5t-\dfrac{21}{5}\right)^2+\left(3t-\dfrac{3}{5}\right)^2\Rightarrow t=0\Rightarrow I(-2;1)$



Gọi phương trình EIF có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$$\begin{cases} I\in EIF \\ E\in EIF \\ F\in EIF \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+4a-2b+c=0 \\ 29+10a+4b+c=0 \\ \dfrac{37}{5}-\dfrac{22}{5}a-\dfrac{16}{5}a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-19 \end{cases} \Rightarrow EFI:(x-1)^2+(y+5)^2=45$$

Chứng minh tứ giác EHIF nội tiếp suy ra $E;I=EIF\cap BD$

Nên thỏa $\begin{cases} (x-1)^2+(y-5)^2=45 \\ 3x-5y+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{5y-11}{3}-1\right)^2+(y+5)^2=45 \\ x=\dfrac{5y-11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{8}{17};x=-\dfrac{49}{17} \\ y=1;x=-2 \end{array}\right.$

Do $I(-2;1)$ nên ta nhận $H\left(-\dfrac{49}{17};\dfrac{8}{17}\right)$

Khi đó, đường thẳng AH qua H và vuông góc $BD\Rightarrow AH:5x+3y+13=0$

Ta có A thỏa mãn hệ $\begin{cases} 5x+3y+13=0 \\ (x+2)^2+(y-1)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5;y=4 \\ x=-\dfrac{13}{17};y=-\dfrac{52}{17} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(5;-4) \\ A\left(-\dfrac{13}{17};-\dfrac{52}{17}\right) \end{array}\right.$

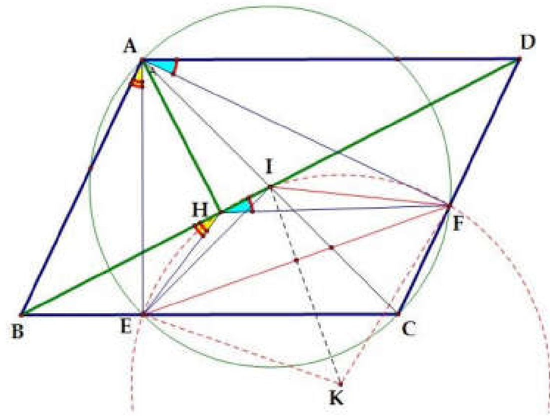
Đặt $g(x;y)=3x-5y+11$ khi đó $\begin{cases} g_{A1}(-5;4)=-24 \\ g_E(-5;-2)=6 \\ g_{A2}(-5;4)=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{A1}(-5;4).g_E(-5;-2)<0 \\ g_{A2}(-5;4).g_E(-5;-2)>0 \end{cases}$

Nhận xét A, E trái phía so với đường BD nên ta nhận $A(-5;4)$

Cách chứng minh tứ giác EHIF nội tiếp

* Theo thuần túy hình học:





Ta có: $\begin{cases} \angle BAE = \angle BHE \text{ tu giac } AHEB \text{ noi tiep do } \angle AHB + \angle ABE = 90^0 \\ \angle FAD = \angle DHF \text{ tu giac } AHFD \text{ noi tiep do } \angle AHD + \angle AFD = 90^0 \\ \angle EAF = \angle ABE \text{ do cung bu voi } \angle BCD, AECF \text{ noi tiep}, AB // CD \end{cases}$

Suy ra $\angle EHF = 180^0 - \angle BHE + \angle DHF = 180^0 - \angle BAE + \angle FAD$

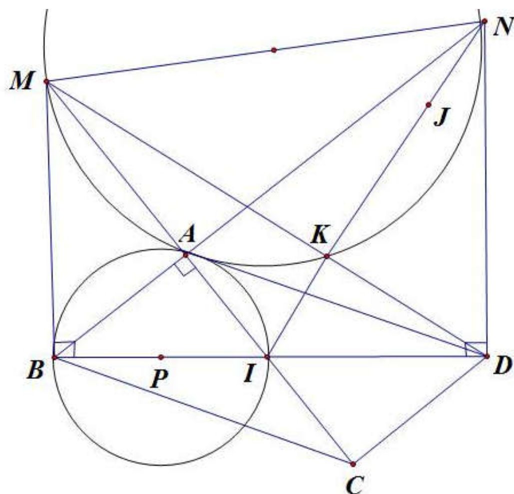
Mà $\begin{cases} \angle FAD + \angle ADF = 90^0 \\ \angle BAE + \angle ABE = 90^0 \\ \angle ABE = \angle ADF \;\; ABCD \text{ la hinh binh hanh} \end{cases} \Rightarrow 2\angle ABE = 180^0 - \angle BAE + \angle FAD$

Suy ra $\angle EHF = 2\angle ABE = 2\angle EAF = \angle EIF \Rightarrow \angle EHF = \angle EIF$ nên tứ giác EHIF nội tiếp.

Bài 5:(Huỳnh Đức Khánh) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành ABCD cps I là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD đồng thời thỏa mãn $\widehat{BAI} = 90^0$. Đường thẳng qua B và vuông góc với BD cắt AI tại M. đường thẳng qua D và vuông góc với BD cắt AB tại N. giả sử đường thẳng DM có phương trình: x+y-4=0, đường thẳng NK đi qua điểm J(5;0) và điểm $P\left(-\frac{1}{2};-3\right)$ là trung điểm của BI. Tìm tọa độ điểm C.(số liệu chỉ mang tính chất minh họa)

Hình vẽ:





Hướng dẫn làm:

$\widehat{MBD} = \widehat{MCD} = 90^0 \Rightarrow \square MBCD$ nội tiếp

$\begin{cases} \widehat{CBD} = \widehat{CMD} \\ \widehat{ADB} = \widehat{CBD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ADB}$ (1)

$\widehat{LAN} = \widehat{NDI} = 90^0 \Rightarrow \square ANID$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{ADI}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ANK} \Rightarrow \square MAKN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MKN} = \widehat{MAN} = 90^0$

$\Rightarrow MD \perp NI$

Câu 6 (Thpt- Chí Linh – Hải Dương) Trong hệ toạ độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $BD = \dfrac{\sqrt{10}}{5}AC$. Biết rằng $M(-2;-1)$, $N(2;-1)$ lần lượt là hình chiếu của D xuống các đường thẳng AB, BC và đường thẳng $x-7y=0$ đi qua A , C. Tìm tọa độ điểm A, C.

Đáp số : $A(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}), C(\frac{7}{2};\frac{1}{2})$ hoặc $A(\frac{7}{2};\frac{1}{2}), C(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2})$.



Gọi I là giao điểm của AC và BD ⇒ I(7y;y). Do tam giác BDM và BDN vuông tại M, N nên

$$IM = IN = \frac{DB}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(7y-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(7y+2)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow I(0;0)$$

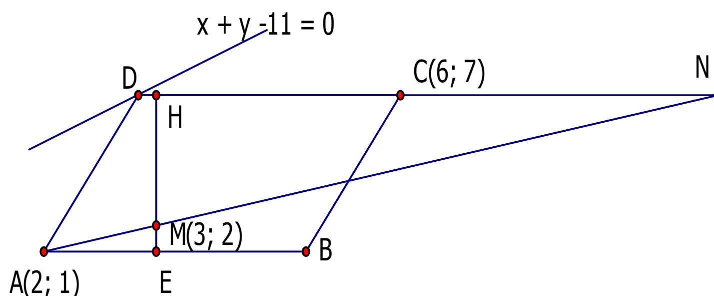
Khi đó BD=2IM= $2\sqrt{5} \Rightarrow AC = \frac{5}{\sqrt{10}}BD = 5\sqrt{2} \Rightarrow IA = IC = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Tọa độ A, C thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x-7y=0 \\ x^2+y^2=\dfrac{25}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\dfrac{7}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ Vậy tọa độ 2 điểm $A(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}), C(\frac{7}{2};\frac{1}{2})$ hoặc $A(\frac{7}{2};\frac{1}{2}), C(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2})$.

Câu 7. (Thpt Chuyên Lê Quý Đôn – Hải Phòng - 2015) Trong hệ toạ độ oxy, cho hình bình hành ABCD có điểm A(2; 1), điểm C(6; 7) và M(3; 2) là điểm thuộc miền trong hình bình hành. Viết phương trình cạnh AD biết khoảng cách từ M đến CD bằng 5 lần khoảng cách từ M đến AB và đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-11=0$.

Đáp số :3x – y – 5 = 0.





Kéo dài AM cắt CD tại N. Gọi E, H lần lượt là hình chiếu của M lên AB, CD

Theo giả thiết HM = 5ME

Do ABCD là hình bình hành nên $AB//CD \Rightarrow \frac{MN}{MA} = \frac{HM}{EM} = 5 \Leftrightarrow MN = 5MA$. Lại có M nằm giữa A và N, MN = 5MA $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 3 = -5(2-3) \\ y_N - 2 = -5(1-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 8 \\ y_N = 7 \end{cases} \Rightarrow N(8;7)$

D là giao điểm của CD và $\Delta: x + y - 11 = 0$ nên tọa độ điểm D là nghiệm hệ phương trình:

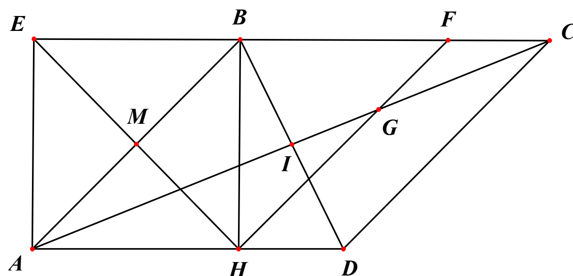
$\begin{cases} y - 7 = 0 \\ x + y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow D(4;7)$

AD đi qua hai điểm A, D nên AD có vtcp là $\vec{u} = \overrightarrow{AD} = (2;6)$ => AD có vtpt là $\vec{n} = (3;-1)$ suy ra phương trình cạnh AD có dạng 3x – y – 5 = 0.

Kiểm tra thấy thỏa mãn điểm M thuộc miền trong hình bình hành ABCD. Vậy phương trình cạnh AD là 3x – y – 5 = 0.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(0;-1)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm $G\left(\frac{4}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác BCD. Tìm tọa độ các điểm B và D.

Giải:



Gọi E, F lần lượt là giao điểm của HM và HG với BC. Suy ra $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GF}$



Do đó $E(-6;1)$ và $F(2;5)$

Đường thẳng BC đi qua E và nhận $\overrightarrow{EF}$ làm vecto chỉ phương, nên $BC: x-2y+8=0$.

Đường thẳng BH đi qua H và nhận $\overrightarrow{EF}$ làm vecto chỉ phương, nên $BH: 2x+y+1=0$. Tọa độ điểm B thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x-2y+8=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$. Suy ra $B(-2;3)$

Do M là trung điểm của AB nên $A(-4;-3)$

Gọi I là giao điểm của AC và BD, suy ra $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{GI}$. Do đó $I\left(0;\frac{3}{2}\right)$

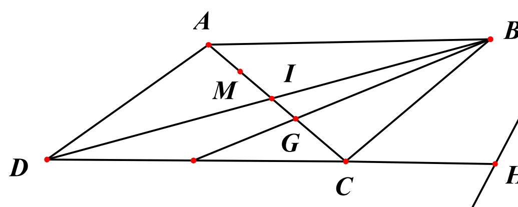
Do I là trung điểm của đoạn BD nên $D(2;0)$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có N là trung điểm cạnh CD và đường thẳng BN có phương trình là $13x-10y+13=0$; điểm $M(-1;2)$ thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC=4AM$. Gọi H là điểm đối xứng với N qua C. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng $3AC=2AB$ và điểm H thuộc đường thẳng $\Delta: 2x-3y=0$

Giải:

$$d(M,BN)=\frac{|13(-1)-10.2+13|}{\sqrt{13^2+10^2}}=\frac{20}{\sqrt{269}}$$

$H\in\Delta \Leftrightarrow H(3a;2a)$



Gọi I là tâm ABCD, G là giao điểm của AC và BN. Ta thấy G là trọng tâm ΔBCD.

Suy ra $CG=\frac{2}{3}CI=\frac{1}{3}AC$ mà

$$AM=\frac{1}{4}AC \Rightarrow MG=\frac{5}{12}AC \Rightarrow CG=\frac{4}{5}MG$$

$$\Rightarrow d(C,BN)=\frac{4}{5}d(M,BN)=\frac{16}{\sqrt{269}} \Rightarrow d(H,BN)=2d(C,BN)=\frac{32}{\sqrt{269}}$$



$\Leftrightarrow \frac{|13.3a-10.2a+13|}{\sqrt{269}}=\frac{32}{\sqrt{269}} \Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=\frac{-45}{19}$

Vì H và M nằm khác phía đối với đường thẳng BN nên $H(3;2)$

Ta thấy $CM=\frac{3AC}{4}=\frac{2AB}{4}=\frac{2CD}{4}=\frac{CD}{2}=CN=CH \Rightarrow \Delta MHN$ vuông tại M.

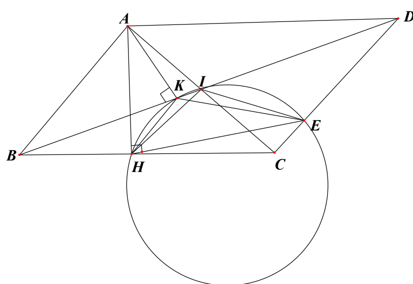
MH có pt $y-2=0 \Rightarrow MN: x+1=0 \Rightarrow N(-1;0) \Rightarrow C(1;1), D(-3;-1)$

Do $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{MA} \Rightarrow A\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right) \Rightarrow I\left(\frac{-1}{3};\frac{5}{3}\right) \Rightarrow B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$

Vậy $A\left(\frac{-5}{3};\frac{7}{3}\right), B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right), C(1;1), D(-3;-1)$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có góc $\widehat{ABC}$ nhọn, đỉnh $A(-2;-1)$. Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD, CD. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác HKE là $(C): x^2+y^2+x+4y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết H có hoành độ âm, C có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng $x-y-3=0$.

Giải:



Ta có: $\widehat{AHC}=\widehat{AEC}=90^0$ nên bốn điểm A, H, C, E cùng thuộc đường tròn đường kính AC.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $\widehat{HIE}=2\widehat{HAE}=2\left(180^0-\widehat{BCD}\right)$

Các tứ giác AKED, AKHB nội tiếp nên $\widehat{EKD}=\widehat{EAD}$ và $\widehat{BKH}=\widehat{BAH}$

Do đó $\widehat{HKE}=180^0-\widehat{EKD}-\widehat{BKH}=180^0-\widehat{EAD}-\widehat{BAH}=2\widehat{HAE}=2\left(180^0-\widehat{BCD}\right)=2\widehat{HIE}$

Vì vậy tứ giác HKIE nội tiếp. Do đó I thuộc đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác HKE.



+ Gọi $C(c;c-3)\in d,(c>0)\Rightarrow I\left(\frac{c-2}{2};\frac{c-4}{2}\right)$, di I thuộc (C) nên có phương trình:

$c^2-c-2=0\Leftrightarrow c=2\vee c=-1$ (loại $c=-1$). Suy ra $C(2;-1)$ và $I(0;-1)$

+) Điểm E, H nằm trên đường tròn đường kính AC và đường tròn (C) nên tọa độ thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+x+4y+3=0\\ x^2+(y+1)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0;y=-3\\ x=-\frac{8}{5};y=-\frac{11}{5}\end{cases}$

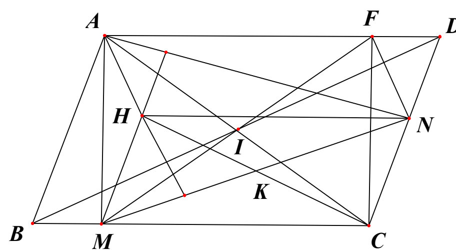
+) Vì H có hoành độ âm nên $H\left(-\frac{8}{5};-\frac{11}{5}\right),E(0;-3)$. Suy ra $AB:x-y+1=0,BC:x-3y-5=0$

Tọa độ B thỏa mãn $\begin{cases}x-y+1=0\\ x-3y-5=0\end{cases}\Rightarrow B(-4;-3)\Rightarrow\overrightarrow{BA}=(2;2),\overrightarrow{BC}=(6;2)\Rightarrow\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=16>0(t/m)$

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow D(4;1)$. Vậy $B(-4;-3),C(2;-1),D(4;1)$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $A(1;2),C(4;6)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC, CD. Viết phương trình đường thẳng MN, biết rằng trực tâm H của tam giác AMN có hoành độ dương nằm trên đường thẳng $x+y+1=0$ và $MN=3$.

Giải:



Ta có HM // NC vì cùng vuông góc với AN.

Và NH // MC (cùng vuông góc AM).

Do đó HMCN là hình bình hành.

Suy ra HN // MC, HN = MC (1)

Gọi F là hình chiếu vuông góc của C lên AD.

Ta có AMCF là hình chữ nhật, do đó AF = CM (2).

Từ (1), (2) suy ra AFNH là hình bình hành.

Do đó $FN//AH\Rightarrow FN\perp MN$

Tam giác vuông FNM có $FN^2=FM^2-MN^2=AC^2-MN^2=16\Rightarrow AH=FN=4$

Gọi $H(a;-a-1)$, với a > 0 ta có: $(a-1)^2+(a+3)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-3(l) \end{array}\right. \Rightarrow H(1;-2)$

Khi đó K là tâm hình bình hành MNHC, thì K là trung điểm của HC.

Do đó $\begin{cases} x_K=\dfrac{x_H+x_C}{2}=\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{5}{2} \\ y_K=\dfrac{y_H+y_C}{2}=\dfrac{-2+6}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow K\left(\dfrac{5}{2};2\right)$

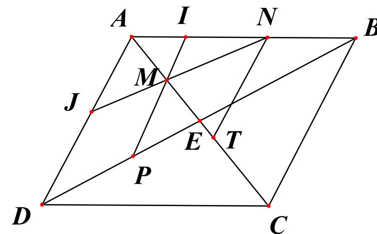
Phương trình đường thẳng MN qua $K\left(\dfrac{5}{2};2\right)$ có VTPT $\overrightarrow{AH}=(0;-8)//(0;1)$ có phương trình $y-2=0$

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình hành ABCD. Gọi $M(3;-1)$ là điểm nằm trên đoạn AC sao cho $AC=4AM$, gọi $N(1;2)$ là điểm trên đoạn AB sao cho $AB=3BN$, gọi $P(2;0)$ là điểm trên đoạn BD sao cho $BD=4DP$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD.

Giải:

Gọi I là giao điểm của PM và AB, J là giao điểm của MN và AD, T là điểm nằm trên cạnh AC sao cho $AC=3TC$.

Ta có: $\dfrac{MI}{BC}=\dfrac{1}{4};\dfrac{MP}{AD}=\dfrac{1}{2}\rightarrow \overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow I\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$



Đường thẳng qua I và N là $(AB):7x+5y-17=0$

Vì $\dfrac{NT}{JA}=\dfrac{NM}{MJ}=\dfrac{MT}{AM}=\dfrac{AT-AM}{AM}=\dfrac{\frac{2}{3}AC-\frac{1}{4}AC}{\frac{1}{4}AC}=\dfrac{5}{3}$

Do đó: $\dfrac{IN}{IA}=\dfrac{MT}{MA}=\dfrac{NT}{JA}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow \overrightarrow{IN}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{IA}\Rightarrow A\left(5;-\dfrac{18}{5}\right)$. Vậy $\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AN}\Rightarrow B\left(-4;\dfrac{24}{5}\right)$



Mặt khác: $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AM}\Rightarrow C\left(-3;\frac{34}{5}\right)$. Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow D\left(6;-\frac{8}{5}\right)$

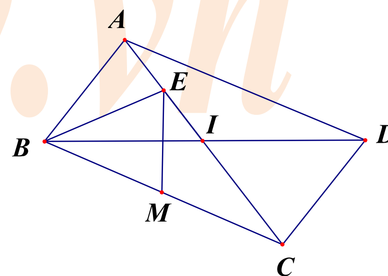
Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $AC=2AB$. Phương trình đường chéo $(BD): x-4=0$. Gọi E là điểm thuộc đoạn AC thỏa mãn $AC=4AE$, gọi M là trung điểm cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $E\left(\frac{5}{2};7\right)$, $S_{BEDC}=36$, điểm M nằm trên đường thẳng $2x+y-18=0$ đồng thời điểm B có tung độ nhỏ hơn 2.

Giải:

Ta chứng minh: $EM\perp BD$. Thật vậy, vì $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ do đó ta có $\Delta ABE\sim\Delta ACB$.

Vậy: $BC=2BE$, mà $BC=2BM$ do đó ΔEBM cân tại B.

Mặt khác, $IE=\frac{1}{2}IA=\frac{1}{2}AB$, $IM=\frac{1}{2}AB$ (đường trung bình ΔABC). Vậy IB là đường trung trực của EM. Do vậy $EM\perp BD$. Phương trình đường thẳng EM qua E và vuông góc BD là $(EM): y=7$.



Vậy tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y-18=0\\(EM): y=7\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{11}{2};7\right)$

Như vậy, ta có ME = 3. Mặt khác,

$S_{BEDC}=2S_{\Delta BEC}=4S_{\Delta BEM}\Rightarrow d_{(B,(EM))}ME=18\Rightarrow d_{(B;(EM))}=6$

Gọi tọa độ tham số điểm $B(4;b)$, ta có $d_{(B,(EM))}=\frac{|b-7|}{1}=6\Rightarrow b=13\vee b=1$. Vì B có tung độ bé hơn 2 do đó ta chọn $B(4;1)$. Vì M là trung điểm của BC cho nên ta tìm được $C(7;13)$.

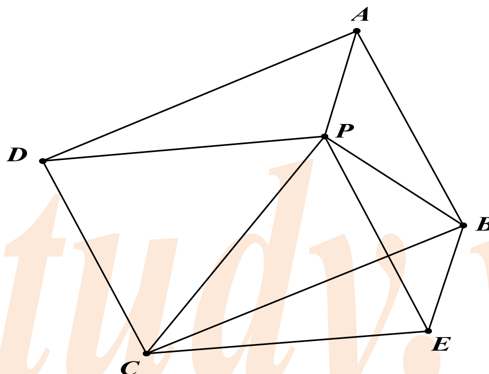


Do: $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE} \Rightarrow A(1;5)$. Lại có ABCD là hình bình hành, do vậy: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow D(4;17)$

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có đỉnh $D(-7;0)$. Một điểm P nằm trong hình bình hành sao cho $\angle PAB = \angle PCB$. Phương trình $d_1 : x + y - 2 = 0, d_2 : 2x - y - 1 = 0$ lần lượt chứa các đoạn thẳng PB, PC. Tìm tọa độ đỉnh A, biết rằng đỉnh A thuộc đường thẳng $y = 3x$ và A có hoành độ nguyên.

(Trích đề thi thử lần 1, Website Tilado.edu.vn, năm 2015)

Hướng dẫn giải:



* Dựng hình bình hành ABEP. Ta thấy tứ giác PECD cũng là hình bình hành (do $AB // = CD // = PE$)

* Và $\begin{cases} \angle PAB = \angle PEB \\ \angle PAB = \angle PCB \end{cases} \Rightarrow \angle PEB = \angle PCB$ suy ra tứ giác PBEC nội tiếp

Suy ra $\angle PCE + \angle PBE = 180^0$

Mà $\begin{cases} \angle PCE = \angle DPC\ (so\ le\ trong) \\ \angle PBE = \angle APB\ (so\ le\ trong) \end{cases} \Rightarrow \angle DPC + \angle APB = 180^0$

* Suy ra $\angle APD + \angle BPC = 180^0$ (do tổng 4 góc tại đỉnh P bằng 360 độ)

* Do P là giao điểm PB và PC suy ra $P(1;1)$ suy ra $PD : x - 8y + 7 = 0$



Gọi hệ số góc của các đường thẳng đi qua PA là k. Ta thấy $\begin{cases} k_{PA} = k, k_{PD} = \dfrac{1}{8} \\ k_{PB} = -1, k_{PC} = 2 \end{cases}$

Suy ra $\left|\dfrac{k-\dfrac{1}{8}}{1+\dfrac{k}{8}}\right| = \left|\dfrac{-1-2}{1-2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=5 \\ k=\dfrac{-23}{11} \end{array}\right.$

* Với $k=5, PA: y=5x-4$ suy ra $A:\begin{cases} 5x-y=4 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2;6)$

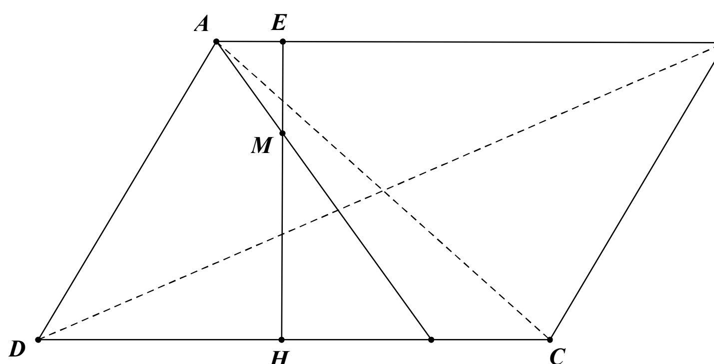
* Với $k=\dfrac{-23}{11} \Rightarrow PA: 23x+11y-34=0 \Leftrightarrow A\left(\dfrac{782}{113};\dfrac{-253}{113}\right)(l)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $A(2;6)$

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có điểm $A(2;1)$, điểm $C(6;7)$, $M(3;2)$ là điểm thuộc miền trong hình bình hành. Viết phương trình cạnh AD biết khoảng cách từ M đến CD bằng 5 lần khoảng cách từ M đến AB và đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-11=0$.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Lê Quý Đôn, Hải Phòng, năm 2015)

Hướng dẫn giải:



* Kéo dài AM cắt CD tại N, gọi E, H lần lượt là hình chiếu của M lên AB, CD.

Theo giả thiết $HM = 5ME$



* Do ABCD là hình bình hành nên $AB//CD \Rightarrow \frac{MN}{MA} = \frac{HM}{EM} = 5 \Leftrightarrow MN = 5MA$

* Lại có M nằm giữa A và N và $MN = 5MA \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow N(8;7)$

* Đường thẳng CD đi qua hai điểm $C(6;7)$ và $N(8;7)$ nên $CD: y-7=0$

Đỉnh D là giao điểm của CD và $\Delta: x+y-11=0$ nên tọa độ D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y-7=0 \\ x+y-11=0 \end{cases} \Rightarrow D(4;7)$$

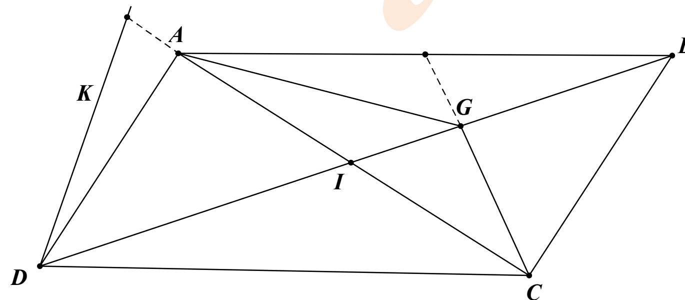
AD đi qua A, D nên $AD: 3x-y-5=0$ (kiểm tra thấy điểm M thuộc miền trong hình bình hành).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $AD: 3x-y-5=0$

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD biết phương trình AC là $x-y+1=0$, điểm $G(1;4)$ là trọng tâm tam giác ABC, điểm $K(0;-3)$ thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành biết diện tích tứ giác AGCD bằng 32 và điểm A có tung độ dương.

(Trích đề thi thử lần 3, THPT Quảng Xương 2, Thanh Hóa, năm 2015)

Hướng dẫn giải:



* Ta có DK vuông góc $AC: x-y+1=0$ suy ra dạng của phương trình DK là:

$DK: x+y+m=0$. DK qua $K(0;-3)$ suy ra m = 3. Do đó $DK: x+y+3=0$

Ta có: $DI = 3GI \Rightarrow d(D;AC) = 3(G;AC)$ với D thuộc DK có tọa độ $D(d;-3-d)$

Do đó: $\frac{|d+3+d+1|}{\sqrt{2}} = 3\frac{|1-4+1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |2d+4| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=-5 \end{array}\right.$



Suy ra: $D(1;-4)$ *hay* $D(-5;2)$

* Ta có: $S_{AGCD}=S_{ACD}+S_{GAC}=\frac{1}{2}d(D;AC).AC+\frac{1}{2}d(G;AC).AC=32$

Suy ra: $4d(G;AC).AC=64\Rightarrow AC=\frac{16}{d(G;AC)}=\frac{16}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}\Rightarrow IA=4\sqrt{2}\,(*)$

* Với $D(1;-4)$ ta có: $\overrightarrow{DI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}(0;8)\Rightarrow I(1;2)$ (với I là giao điểm 2 đường chéo AC và BC)

Lại có I là trung điểm BD suy ra $B(1;8)$. Ta có A thuộc AC suy ra $A(a;a+1)$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow(a-1)^2+(a-1)^2=32\Leftrightarrow(a-1)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5(tm)\\a=-3(ktm)\end{array}\right.$. Do A có tung độ dương

Suy ra $A(5;6)$ suy ra $C(-3;-2)$

* Với $D(-5;2)$ ta có: $\overrightarrow{DI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}(6;2)\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ (loại vì không thuộc AC)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $A(5;6),B(1;8),C(-3;-2),D(1;-4)$

HÌNH THOI

Bài 1 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có đường chéo AC nằm trên đường thẳng $d: x+y-1=0$. Điểm $E(9;4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB, điểm $F(-2;-5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh $AD, AC=2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD biết điểm C có hoành độ âm.

(Đề thi thử THPT Đoàn Thị Điểm Khánh Hòa 2016)

Giải

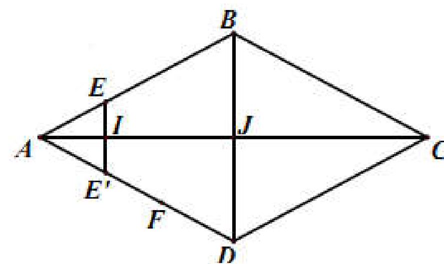


Gọi E’ là điểm đối xứng với E qua AC

do AC là phân giác của góc BAD nên E’ thuộc AD

EE’ vuông góc với AC và qua điểm $E(9;4)$

nên có phương trình $x-y-5=0$



Gọi I là giao điểm của AC và EE', tọa độ I là nghiệm hệ: $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow I(3;2)$

Vì I là trung điểm của EE' nên $E'(-3;-8)$

Đường thẳng AD qua $E'(-3;-8)$ và $F(-2;-5)$ có VTPT là $\overrightarrow{E'F}(1;3)$ nên phương trình là:

$$3(x+3)-(y+8)=0 \Leftrightarrow 3x-y+1=0$$

Điểm $A=AC\cap AD \Rightarrow A(0;1)$. Giả sử $C(c;1-c)$

Theo bài ra $AC=2\sqrt{2} \Leftrightarrow c^2=4 \Leftrightarrow c=2; c=-2$

Do hoành độ điểm C âm nên $C(-2;3)$

Gọi J là trung điểm AC suy ra $J(-1;2)$, đường thẳng BD qua J và vuông góc với AC có phương trình $x-y+3=0$. Do $D=AD\cap BD \Rightarrow D(1;4) \Rightarrow B(-3;0)$

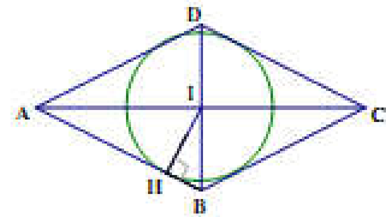
Vậy $A(0;1), B(-3;0), C(-2;3), D(1;4)$

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn $(C):(x-1)+(y+1)=20$. Biết rằng AC=2BD và điểm B thuộc đường thẳng d: 2x-y- 5 = 0. Viết phương trình cạnh AB của hình thoi ABCD biết điểm B có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Đồng Xoài Bình Phước 2016)

Giải





Gọi I là tâm đường tròn (C)

→ I(1;-1) và I là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng AB

Ta có: $AC = 2BD \Rightarrow IA = 2IB$

Xét tam giác IAB vuông tại I, ta có: $\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{1}{IH^2} \Rightarrow \frac{5}{4IB^2}=\frac{1}{20} \Rightarrow IB = 5$

Ta lại có điểm $B \in d \Rightarrow B(b;2b-5)$

* $IB = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(b-1)^2+(2b-4)^2} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=-\frac{2}{5}\end{array}\right.$. Chọn b = 4 (vì b > 0) $\Rightarrow B(4;3)$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là VTPT của đường thẳng AB, pt đường thẳng AB có dạng:

$a(x-4)+b(y-3)=0$

Đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn (C) nên ta có:

$$d(I,AB)=\sqrt{20} \Leftrightarrow \frac{|-3a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{20} \Leftrightarrow 11a^2-24ab+4b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{2}{11}b \\ a=2b\end{array}\right.$$

* Với $a = 2b$, chọn $b=1, a=2 \Rightarrow$ pt đường thẳng AB là: $2x+y-11=0$

* với $a=\frac{2}{11}b$, chọn $b=11, a=2 \Rightarrow$ pt đường thẳng AB là: $2x+11y-41=0$

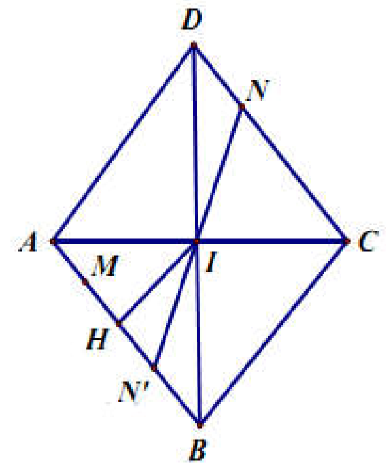
Bài 3 Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\frac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3. ***(Đề thi thử TTGD - TX Cam Lâm 2016 Lần 2)***

Giải

Tọa độ điểm N' đối xứng với điểm N qua I là: $N'\left(3;\frac{5}{3}\right)$

Đường thẳng AB đi qua M, N' có phương trình: $x-3y+2=0$

Suy ra $IH=d(I,AB)=\frac{|3-9+2|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$



Với H là chân đường vuông góc từ I xuống AB.

Do $AC=2BD$ nên $IA=2IB$. Đặt $IB=x>0$, ta có phương trình

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4x^2}=\frac{5}{8}\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

Đặt $B(x;y)$. Do $IB=\sqrt{2}$ và $B\in AB$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=2\\x-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y^2-18y+16=0\\x=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{14}{5}\\y=\frac{8}{5}\end{cases}\vee\begin{cases}x=4>3\\y=2\end{cases}$$

Do B có hoành độ nhỏ hơn 3 nên ta chọn $B\left(\frac{14}{5};\frac{8}{5}\right)$

Vậy phương trình đường chéo BD là $7x-y-18=0$

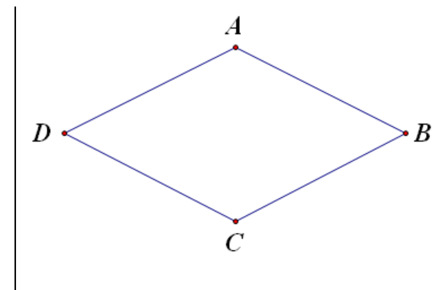
Bài 4 Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD cạnh AC có phương trình là $x+7y-31=0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1:x+y-8=0,d_2:x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết rằng diện tích hình thoi bằng 75 và đỉnh A có hoành độ âm.***(Đề thi thử THPT Lê Hồng Phong 2016)***

Giải

$B\in d_1\Rightarrow B(b;8-b),D\in d_2\Rightarrow(2d-3;d)$

Khi đó $\overrightarrow{BD}=(-b+2d-3;b+d-8)$ và trung điểm của BD là

$I\left(\frac{b+2d-3}{2};\frac{-b+d+8}{2}\right)$



Theo tính chất hình thoi ta có:



$$\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{BD} = 0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8b+13d-13=0 \\ -6b+9d-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}$$

Suy ra $B(0;8); D(-1;1)$. Khi đó $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right); A \in AC \Rightarrow A(-7a+31;a)$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC = \frac{2S_{ABCD}}{BD} = 15\sqrt{2} \Rightarrow IA = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left(-7a+\frac{63}{2}\right)^2 + \left(a-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow \left(a-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(10;3)\ (ktm) \\ A(-11;6) \end{array}\right.$$

$\rightarrow C(10;3)$

Bài 5 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có BD = 2AC. Đường thẳng BD có phương trình $x-y=0$. Gọi M là trung điểm của CD và H(2;-1) là hình chiếu vuông góc của A trên BM. Viết phương trình đường thẳng AH.***(Đề thi thử THPT iSCHOOL Nha Trang Khánh Hòa 2016 Đề 1)***

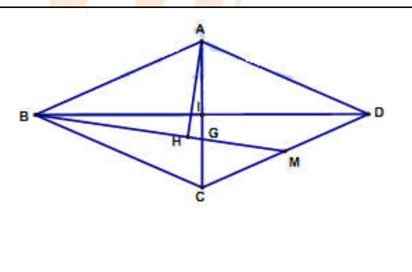
Giải

Gọi I là tâm của hình thoi ABCD và $G = BM \cap AC$

→ G là trọng tâm của tam giác BCD.

Tam giác BIG vuông tại I có

$$\sin\widehat{IBG} = \frac{IG}{BG} = \frac{IC}{\sqrt{BI^2+IG^2}} = \frac{IG}{\sqrt{(6IG)^2+IG^2}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$



$$\Rightarrow \cos(BD, AH) = \sin\widehat{BIH} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

Đường thẳng BD có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (1;-1)$, gọi vectơ pháp tuyến của AH là

$\overrightarrow{n_2} = (a;b)\ (a^2+b^2 \neq 0)$



Ta có:

$$\cos\left(\widehat{BD,AH}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{37}}\Leftrightarrow\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{37}}\Leftrightarrow 35a^2-74ab+35b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{7}{5}\\ \frac{a}{b}=\frac{5}{7}\end{array}\right.$$

Với $\frac{a}{b}=\frac{7}{5}$. Chọn $\vec{n}=(7;5)$, ta có phương trình AH là $7(x-2)+5(y+1)=0\Leftrightarrow 7x+5y-9=0$

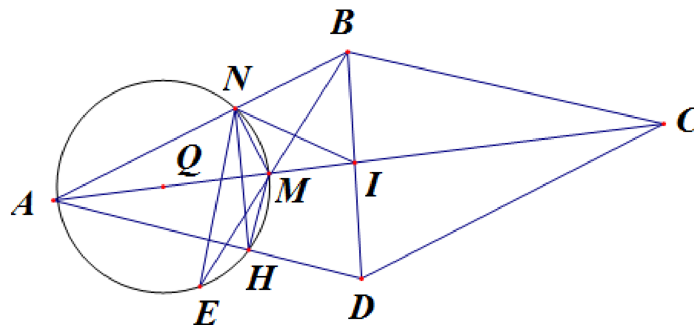
Với $\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$: Chọn $\vec{n}=(5;7)$, ta có phương trình AH là $5(x-2)+7(y+1)=0\Leftrightarrow 5x+7y-3=0$ Vậy

$AH: 7x+5y-9=0$ hoặc $5x+7y-3=0$

Bài 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình cạnh CD: 2x+y+3=0. I là giao điểm của AC và BD. Gọi M là điển trên đoạn AI (M khác A và I), đường tròn đường kính AM cặt cạnh AB tại N, cắt đường thẳng BM tại F. Đường tròn đường kính AM có phương trình

(C): $x^2+y^2-4x-5y+4=0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình thoi, biết tâm đường tròn nôi tiếp tam giác EIN thuộc trục hoành.(số liệu chỉ mang tính chất minh họa)

Hình vẽ:



Có tứ giác BANI nội tiếp $(\hat{I}=\hat{E}=90^0)\rightarrow\widehat{MEI}=\widehat{BAI}$



Mặt khác có $\widehat{ABI} = \widehat{NEM}$ (chắn cung NM)

$\Rightarrow \angle NEM = \angle MEI$ (*)

gọi $H = IE \forall (O)$, ta có $2\widehat{AIE} = (\widehat{AE} - \widehat{HM}), 2\widehat{ABE} = \widehat{AE} - \widehat{NM}$

ta có $\widehat{ABE} = \widehat{AIE}$ (chắn cung AE) $\rightarrow \widehat{NM} = \widehat{MH}$,hay $\widehat{HAM} = \widehat{MAN}$;

ta lại có $\widehat{DAM} = \widehat{NAM}$ hay H thuộc AD, -> IM là trung trực của NH,

-> IM là phân giác $\widehat{NIH}$ (**)

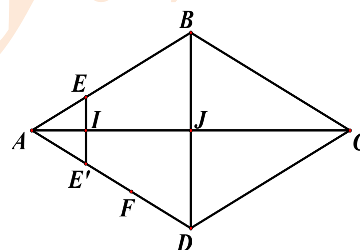
Từ (*) và (**) suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle NEI$

Câu 7. (Sở GD – Bắc Ninh – Lần 2 - 2015) Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* có đường chéo *AC* nằm trên đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$. Điểm $E(9;4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AB*, điểm $F(-2;-5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AD*, $AC = 2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh hình thoi *ABCD* biết điểm *C* có hoành độ âm.

Đáp số : $A(0;1)$, $B(-3;0)$, $C(-2;3)$, $D(1;4)$.

+) Gọi *E'* là điểm đối xứng với *E* qua *AC*

$\Rightarrow$ *E'* thuộc *AD*.



Vì *EE'* vuông góc với *AC* và qua điểm $E(9;4)$

$\Rightarrow$ phương trình *EE'*: $x - y - 5 = 0$.

Gọi $I = AC \cap EE'$, tọa độ I

là nghiệm hệ $\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2)$

Vì *I* là trung điểm của *EE'* $\Rightarrow E'(-3;-8)$

AD qua $E'(-3;-8)$ và $F(-2;-5) \Rightarrow$ phương trình *AD*: $3x - y + 1 = 0$

$A = AC \cap AD \Rightarrow A(0;1)$. Giảsử $C(c;1-c)$. Vì

$AC = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c^2 = 4 \Leftrightarrow c = 2; c = -2 \Rightarrow C(-2;3)$

Gọi J là trung điểm $AC \Rightarrow J(-1;2) \Rightarrow$ phương trình *BD*: $x - y + 3 = 0$.



$D = AD \cap BD \Rightarrow D(1;4) \Rightarrow B(-3;0)$ Vậy $A(0;1)$, $B(-3;0), C(-2;3), D(1;4).$

Bài 8 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có BD = 2AC. Đường thẳng BD có phương trình $x - y = 0$. Gọi M là trung điểm của CD và H(2;-1) là hình chiếu vuông góc của A trên BM. Viết phương trình đường thẳng AH.

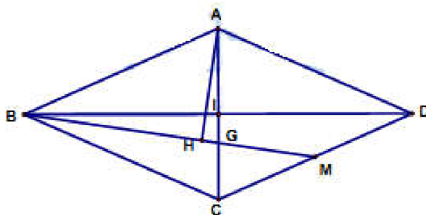
(Đề thi thử THPT iSCHOOL Nha Trang Khánh Hòa 2016 Đề 1)

Giải

Gọi I là tâm của hình thoi ABCD và $G = BM \cap AC$

→ G là trọng tâm của tam giác BCD.

Tam giác BIG vuông tại I có $\sin \widehat{IBG} = \frac{IG}{BG} = \frac{IC}{\sqrt{BI^2 + IG^2}} = \frac{IG}{\sqrt{(6IG)^2 + IG^2}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$



$\Rightarrow \cos(BD, AH) = \sin \widehat{BIH} = \frac{1}{\sqrt{37}}$

Đường thẳng BD có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (1;-1)$, gọi vectơ pháp tuyến của AH là $\overrightarrow{n_2} = (a;b)$

$(a^2 + b^2 \neq 0)$



Ta có:

$$\cos\left(\widehat{BD, AH}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow 35a^2 - 74ab + 35b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{7}{5} \\ \frac{a}{b} = \frac{5}{7} \end{array}\right.$$

Với $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$. Chọn $\vec{n} = (7;5)$, ta có phương trình AH là

$7(x-2) + 5(y+1) = 0 \Leftrightarrow 7x + 5y - 9 = 0$

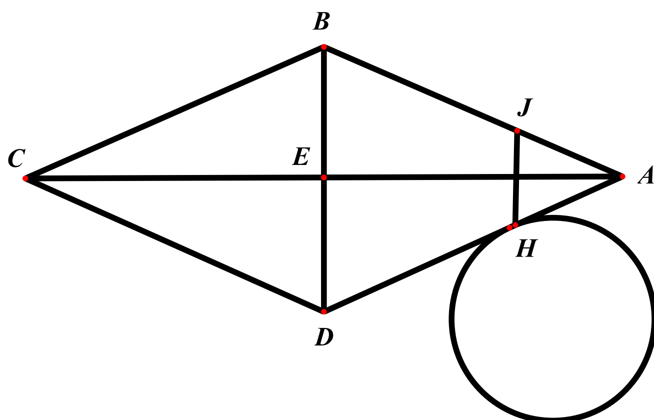
Với $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$: Chọn $\vec{n} = (5;7)$, ta có phương trình AH là

$5(x-2) + 7(y+1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 7y - 3 = 0$

Vậy $AH: 7x + 5y - 9 = 0$ hoặc $5x + 7y - 3 = 0$

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có diện tích bằng 40, đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn $(S):(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$, điểm $J\left(\frac{19}{5};\frac{18}{5}\right)$ nằm trên đường thẳng AB, đường thẳng AC có phương trình $x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, D biết D có hoành độ nhỏ hơn 5.

Giải:





Gọi I là điểm đối xứng với J qua đt AC thì $I \in AD$. Giả sử $I(a;b)$ thì trung điểm của IJ là $H\left(\frac{a+\frac{19}{5}}{2};\frac{b+\frac{18}{5}}{5}\right)$. I, J dối xứng nhau nhau qua $AC \Leftrightarrow \begin{cases} H \in AC \\ \overrightarrow{JI}.\overrightarrow{u_{AC}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=5, b=0$.

Vậy $I(5;0)$.

Ta có: $I(5;0) \in (S)$ nên đt AD chính là tiếp tuyến của (S) tại I. Pt AD: $x-y-5=0 \Rightarrow A(8;3)$

Gọi E là tâm của hình thoi và $\varphi = \angle EAD \Rightarrow \varphi$ là góc giữa AC và AD

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cot\varphi = 2 \Rightarrow S_{ABCD} = 40 \Leftrightarrow DE.EA = 20 \Leftrightarrow DE.DE\cot\varphi = 20 \Leftrightarrow DE^2 = 10$$

Giả sử $D(x_0;x_0-5)$; $DE^2 = 10 \Leftrightarrow d^2(D,AC) = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{|x_0 - 3(x_0-5)+1|}{\sqrt{10}}\right)^2 = 10$

$\Leftrightarrow (16-2x_0)^2 = 100 \Leftrightarrow x_0 = 3 < 5;\ x_0 = 13 > 5$ (loại). Vậy $D(3;-2)$

ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Câu hỏi đặt ra là khi nào các em nghĩ đến đường phân giac , tính chất phân giác thường khó nhìn và ít giả thiết , trên đây thầy tổng hợp một số bài với ý đồ ra thường xuyên gặp , để giúp các em có được sự chủ động hơn trong quá trình giải các bài toán lien quan đến tính chất này .

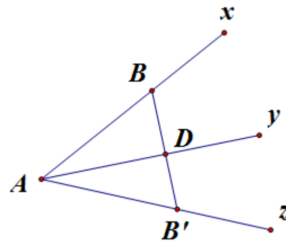
Tính chất :

Nếu Ay là phân giác của $\widehat{xAz}$ thì nếu B' đối xứng với B qua Ay thì B' thuộc Az . Bài toán đôi khi cho A , cho B , Ay , học yêu cầu viết phương trình Az . Hoặc ngược lại …

Dạng 1 : cho Ay , cho A , cho B , Yêu cầu viết Az



Cách làm : Viết phương trình (d) qua B vuông góc Ay , tìm giao điểm của (d) với Ay , lấy B’ đối xứng B qua D . Từ đó viết được phương trình Az qua (A,B’)



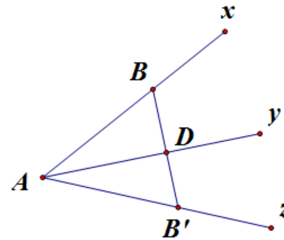
Dang 2 : Bài toán cho Ax , Ay , họ yêu cầu tìm Az

Cách làm :

$$\cos\widehat{xAy} = \cos\widehat{yAz}$$

Dùng công thức cos 2 véc tơ :

$$\cos(n_1, n_2) = \frac{|A.A' + B.B'|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

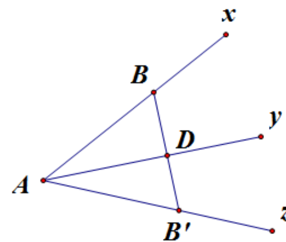


Dang 3 : Bài toán cho Ax , cho điểm D nào đó thuộc Ay (không cho phương trình Ay) , cho vtpt Az , khi đó ta cũng tìm được phương trình Az

Cho Ax : Ax + By + C = 0 , M(x_o,y_o) , Az // hoặc vuông góc với một đường cho trước nên có vtpt (A’,B’)

$$d_{M/Ax} = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2+B^2}.}; \ d_{M/Az} = \frac{|A'x_o + B'y_o + C'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}.},$$

$$d_{M/Ay} = d_{M/Az} \Rightarrow \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A'x_o + B'y_o + C'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}.}$$



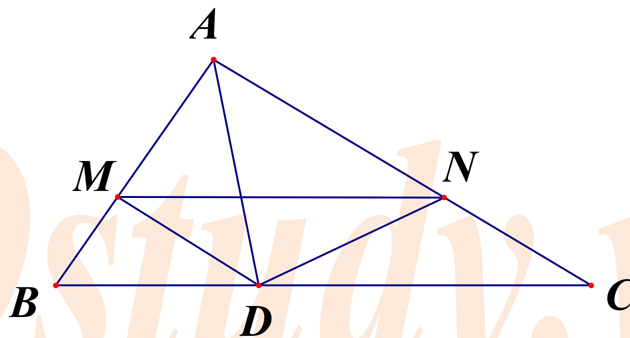
DẠNG 1 : BÀI TOÁN PHÁT HIỆN TÍNH CHẤT PHÂN GIÁC



Sau mỗi bài toán các em nên tự đặt câu hỏi : Dấu hiệu nào cho ta biết ý đồ "Phân giác" , số liệu cho có ý nghĩa gì , đối chiếu xem nó thuộc dạng mấy trong các trường hợp thầy liệt kê , nếu thiếu em tự bổ xung vào nhé , CHÚC CÁC EM THÀNH CÔNG

Bài 1. Cho tam giác ABC, đường thẳng d song song BC cắt AB, AC tại M,N sao cho AM = CN. Kẻ MD song song NC, điểm D thuộc BC.

Cho M(-4;0), C(5;2), D(0;-1). Tìm tọa độ A và B.



+) Có MN // BC và MD // AC $\rightarrow$ MNCD là hình bình hành

$\rightarrow$ MD = NC = AM

Do đó tam giác AMD cân tại M$\rightarrow \widehat{MAD}=\widehat{MDA}$

+) Vì MD // AC nên $\widehat{MDA}=\widehat{DAC}$

$\rightarrow \quad \widehat{MAD}=\widehat{DAC} \rightarrow$ AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$

+) Phương trình đường thẳng MD có dạng x + 4y + 4 = 0

Phương trình đường thẳng AC đi qua C và song song với MD là: x + 4y – 13 = 0

Vì A nằm trên AC $\rightarrow$A(– 4t + 13; t)

Ta có AM = MD $\Leftrightarrow \left(-4t+13+4\right)^2+t^2=17$

$\Leftrightarrow 17t^2-136t+272=0 \Leftrightarrow$ t = 4$\rightarrow$A(-3;4)

+) Phương trình đường thẳng AB đi qua hai điểm A và M là: 4x – y + 16 = 0



Phương trình đường thẳng BC đi qua hai điểm C và D là: 3x – 5y - 5 = 0

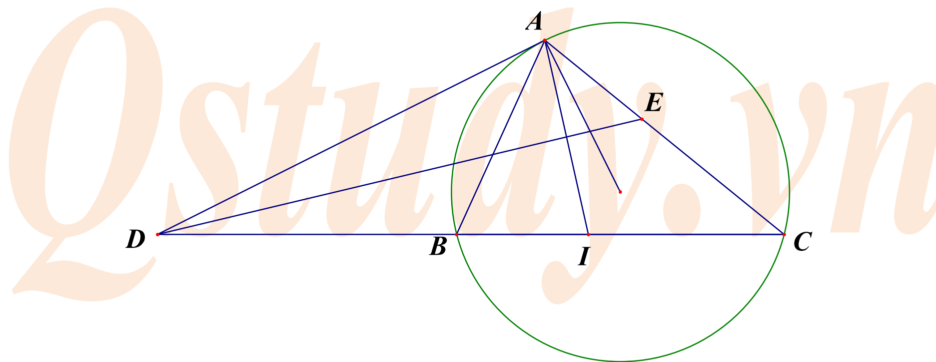
Bài 2. Cho tam giác ABC, A(1;4), tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác $\widehat{ADB}$ có phương trình x – y + 2 = 0 và điểm M(-4;1) thuộc AC. Viết phương trình AB.

Vì B là giao điểm của AB và BD nên B(-5;-4)

*) Vậy A(-3;4)   B(-5;-4)

Đáp án

***) Cách 1:**



+) Gọi AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$, E là chân đường phân giác của $\widehat{ADB}$.

Ta có: $\widehat{AID} = \widehat{ABC} + \widehat{BAI}$

$\widehat{IAD} = \widehat{CAD} + \widehat{CAI}$

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}, \widehat{ABC} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{IAD} \Rightarrow \Delta DAI$ cân tại $D \Rightarrow DE \perp AI$

Phương trình đường thẳng AI là: $x + y - 5 = 0$

+) Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng MM' : $x - y + 5 = 0$

Gọi $AI \cap MM' \equiv K \Rightarrow K(0;5) \Rightarrow M'(4;9)$

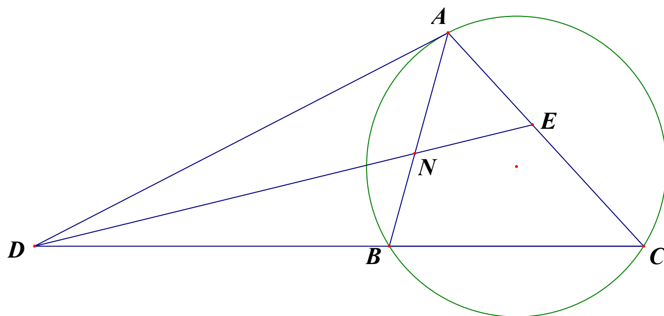


VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'} = (3;5) \Rightarrow$ VTPT của đường thẳng AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (5;-3)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB là: $5(x-1)-3(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x-3y+7=0.$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $5x-3y+7=0.$

***) Cách 2:**



+) Phương trình đường thẳng $AC: 3x-5y+17=0.$

Gọi $d \cap AC \equiv E; AB \cap DE \equiv N.$

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x-5y+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=\dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{11}{2}\right)$

Lại có $\begin{cases} \widehat{ANE} = \widehat{DAN} + \widehat{ADN} \\ \widehat{AED} = \widehat{EDC} + \widehat{ECD} \end{cases}$

Mà $\widehat{DAB} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{ADE} = \widehat{EDB}$ (Do các tính chất tiếp tuyến và phân giác)

$\Rightarrow \triangle ANE$ cân tại $A.$

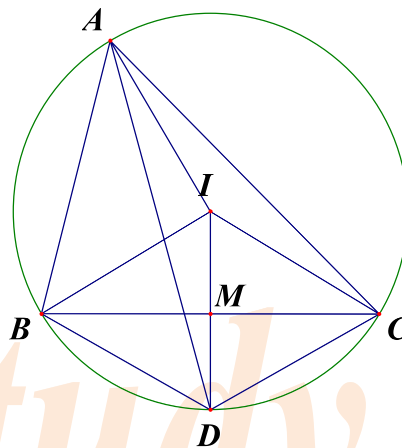
+) Giả sử $N(n;n+2)$, từ $AN = AE \Rightarrow N\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Vậy phương trình đường thẳng $AB: 5x-3y+7=0.$



Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Kẻ hình thoi ICDB có BC = $\sqrt{3}$ ID. Đường thẳng BC có phương trình: 3x + y + 3 = 0. A(2;-1), điểm E(-2;3) thuộc DA. Tìm B,C

Đáp án



+) Vì BC = $\sqrt{3}$ ID nên $\widehat{IBD}=\widehat{ICD}=\widehat{CID}=\widehat{BID}=\widehat{BDI}=\widehat{IDC}=60^o$

Nên ta có các tam giác đều: ∆IBD và ∆ICD

Do đó ID = IB = IC nên D nằm trên đường tròn (I)

+) Vì $\widehat{CID}=\widehat{BID}$ nên D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$

$\rightarrow$ AD là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$

+) Phương trình đường thẳng AD đi qua hai điểm A và E là: x + y – 1 = 0

+) Nhận thấy: $\widehat{BAC}=\widehat{BID}=60^o$ $\left(=\frac{1}{2}\widehat{BIC}\right)\rightarrow\widehat{BAD}=\widehat{CAD}=30^o$

Giả sử đường thẳng AB có phương trình a(x-2) + b(y+1) = 0 hay ax + by -2a + b = 0

Ta có cos(AB;AD)=cos 30^o $\Leftrightarrow\dfrac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+4ab=3a^2+3b^2$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\left(2+\sqrt{3}\right)b \\ a=\left(2-\sqrt{3}\right)b \end{array}\right.$$

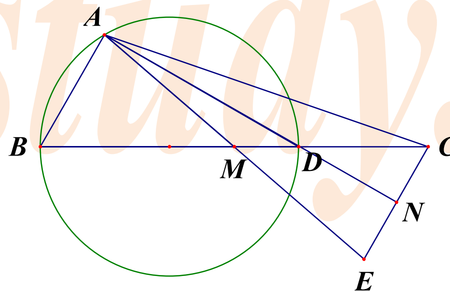
- Nếu $a=\left(2+\sqrt{3}\right)b$. Chọn a= $2+\sqrt{3}$; b=1 . Khi đó phương trình AB có dạng

  ($2+\sqrt{3}$)x + y - ($4+2\sqrt{3}$) + 1 = 0

  B là giao điểm của AB và BC $\rightarrow$ B góc 30^{o} nên số hơi lẻ các em cẩn thận

Bài 4. Cho đoạn thẳng BC. M là trung điểm BC, D thuộc đoạn BC sao cho BC = 3CD. Kẻ đường tròn đường kính BD. Lấy điểm A thuộc đường tròn trên, biết AD: 3x – 2y – 5 = 0, A(1;-1), M$\left(\frac{13}{4};\frac{3}{4}\right)$ điểm C thuộc đường thẳng 9x – 5y = 0. Tìm B,C

Đáp án



+) Dựng hình bình hành ABEC, AD cắt CE tại N $\Rightarrow$ M là trung điểm của AE và CE // AB

Mặt khác AN $\perp$ CE do AN $\perp$ AB (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ AN là đường cao của tam giác ACE (1)

+) Ta lại có CM là trung tuyến của tam giác ACE (M là trung điểm AE)

Mà CD = $\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}CM$ nên D là trọng tâm của tam giác ACE

Do đó AN đi qua D là trung tuyến của tam giác ACE (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ΔACE cân tại A

Do đó AN là phân giác của góc $\widehat{MAC}$



+) Phương trình đường thẳng AM đi qua hai điểm A và M là: 7x – 9y – 16 = 0

Giả sử AC có phương trình là: ax + by – a + b = 0

Ta có cos(AM;AD) = cos(AC;AD)

$$\Leftrightarrow \frac{|7.3+9.2|}{\sqrt{7^2+9^2}.\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|3a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{3^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow 117a^2+117b^2 = 90a^2-120ab+40b^2$$

⇔ (9a+7b)(3a+11b) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9a=-7b \\ 3a=-11b \end{array}\right.$$

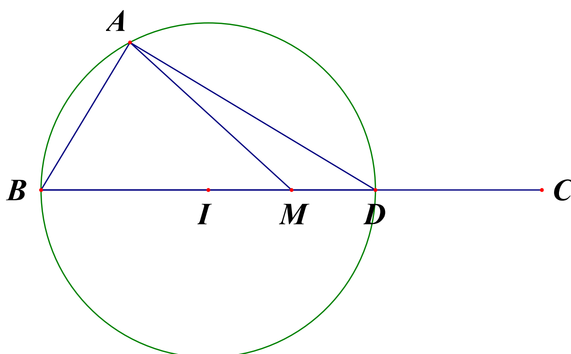
- Nếu 9a= -7b: chọn a=7; b= -9 ta được phương trình AC: 7x – 9y – 16 = 0 (loại vì đây là phương trình đường thẳng AM)
- Nếu 3a = -11b: chọn a=11; b=-3 ta được phương trình AC: 11x – 3y – 14 = 0 (nhận)

Khi đó ta có C$\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$

Vì M$\left(\frac{13}{4};\frac{3}{4}\right)$ là trung điểm của BC nên B(4;-3)

Vậy B(4;-3) C$\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$

Cách 2 :



+) Ta có: $CD = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}.2MC = \frac{2}{3}MC$



$\rightarrow MD = \frac{1}{2}CD$ $\rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MD}$

+) Vì D nằm trên AD $\rightarrow$ D $\left(\frac{2d+5}{3};d\right)$ $\rightarrow \overrightarrow{MD} = \left(\frac{2d+5}{3} - \frac{13}{4}; d - \frac{3}{4}\right)$

Vì C nằm trên đường thẳng 9x – 5y = 0 nên C $\left(\frac{5c}{9};c\right)$ $\rightarrow \overrightarrow{DC} = \left(\frac{5c}{9} - \frac{2d+5}{3}; c-d\right)$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{2d+5}{3} - \frac{13}{4}\right) = \frac{5c}{9} - \frac{2d+5}{3} \\ 2\left(d - \frac{3}{4}\right) = c - d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d+5 = \frac{5c}{9} + \frac{13}{2} \\ 3d = c + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$ $\rightarrow$ C $\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$

Vì M là trung điểm của BC nên B(4;-3)

+) Vậy B(4;-3) C $\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$

Bài 5. Cho tam giác ABC (AC > AB) nội tiếp đường tròn tâm I, điểm E thuộc AC sao cho AE = AB. Kẻ ED vuông góc với AI, D thuộc BC. Cho A(2;6); M(2;0) thuộc AD. Tìm C biết I thuộc đường thẳng 2x – y + 2 = 0 , AB có phương trình : $2x + y - 10 = 0$, đường thẳng AC vuông góc với $(d): x + 2y - 10 = 0$

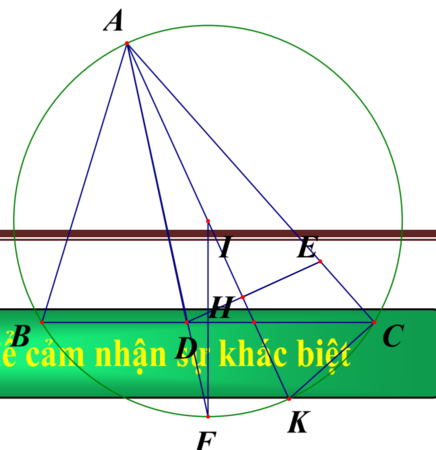
Đáp án

+) Gọi F là giao điểm của AD với đường tròn (I)

K là giao điểm của IA với đường tròn (I)

H là giao điểm của ID với AK

Vì ID ⊥ IA $\rightarrow \widehat{AED} = 90^o - \widehat{IAE} = \widehat{AKC} = \widehat{ABC}$





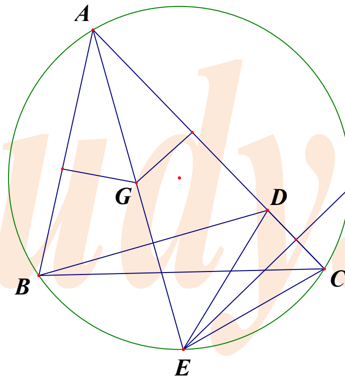
Từ đó ta thấy ΔAED = ΔABD (cạnh – góc – cạnh)

$\rightarrow$ AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$

Phần tiếp theo các em tự tính

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có AB < AC. Lấy điểm D thuộc AC sao cho AD = AB. Kẻ trung trực của DC cắt đường tròn (C) tại E. Biết G(-2;2) thuộc AE. AC có phương trình 2x + y – 3 = 0. AB song song với đường x – 2y + 10 = 0. Biết A có hoành độ nguyên âm. Tìm A,B,C biết phương trình BC: 3x + 4y + 3 = 0

Đáp án



+) Ta có tứ giác CAEB nội tiếp đường tròn (C)$\rightarrow$ $\widehat{DCE} = 180^o - \widehat{ABE}$

Mặt khác ta lại có: $\widehat{DCE} = \widehat{CDE}$ = $180^o - \widehat{ADE} \rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADE}$

Mà: $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$ (tam giác ABD cân tại A do AD = AB)

$\rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{BDE}$ nên ΔDEB cân tại E

$\rightarrow$ BE = DE $\rightarrow$ E nằm trên đường trung trực của BD

Như vậy AE là trung trực của BD đồng thời là phân giác góc $\widehat{DAB}$

+) AC: 2x + y – 3 = 0

BC: 3x + 4y + 3 = 0

Vì C là giao điểm của AC và BC$\rightarrow$ C(3;-3)



Gọi phương trình AE có dạng: a(x+2) + b(y-2) = 0

Khi đó ta có $\cos\widehat{BAE} = \cos\widehat{CAE}$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2a+b|}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2b=2a+b \\ a-2b=-2a-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3b \\ 3a=b \end{array}\right.$$

- Nếu a= -3b. Chọn a=3; b= -1 ta được phương trình AE: 3x – y + 8 = 0

  A là giao điểm của AE và AC nên A(-1;5) (thỏa mãn A có hoành độ nguyên âm)
- Nếu 3a = b. Chon a=1; b=3 ta được phương trình AE: x + 3y – 4 = 0

  A là giao điểm của AE và AC nên A(1;1) (không thỏa mãn A có hoành độ nguyên âm)

Do đó A(-1;5). Khi đó ta có phương trình AB đi qua A và song song với đường thẳng x – 2y +10 = 0:

AB : x – 2y + 11 = 0

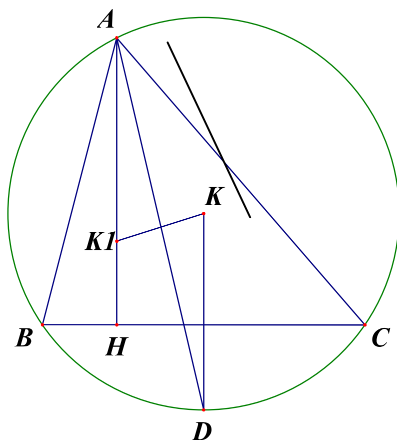
B là giao điểm của AB và BC → B(-5;3)

Vậy A(-1;5) B(-5;3) C(3;-3)

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (K). Gọi H là hình chiếu của A lên BC, góc $\widehat{BAC}$ nhọn. Đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ có phương trình: x + 1 = 0. Tìm điểm B,C biết K$\left(\frac{5}{8};-\frac{1}{4}\right)$, H $\left(\frac{-13}{5};\frac{-1}{5}\right)$ và điểm B có hoành độ âm.

Đáp án





+) Gọi D là giao điểm của phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với đường tròn $(K) \Rightarrow D$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow KD \perp BC \Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{ADK} = \widehat{DAK}$ (Do $AH // KD, KD = KA$) hay AD là phân giác góc $\widehat{HAK}$.

+) Gọi K_1 là điểm đối xứng của K qua $AD \Rightarrow K_1 \in AH \Rightarrow K_1\left(-\frac{21}{8}; -\frac{1}{4}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AH: 2x - y + 5 = 0$.

Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+1=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(-1;3)$

Phương trình đường thẳng $BC: x + 2y + 3 = 0$

Phương trình đường tròn $(K): \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{845}{64}$

Tọa độ của B, C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ \left(x-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{845}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

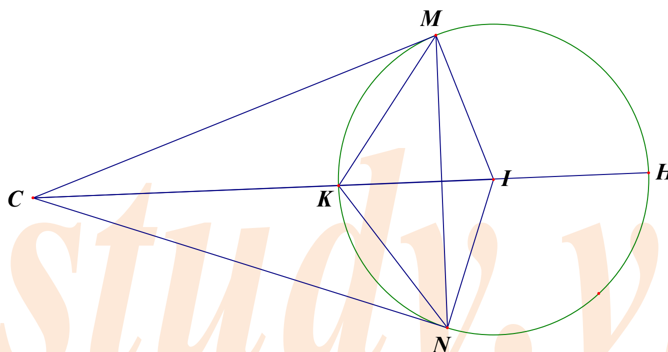
Mà $x_B < 0 \Rightarrow B(-3;0), C(3;-3)$.



Vậy $B(-3;0),C(3;-3)$.

Bài 8. (Đề 12 – Thầy Quang Baby): Cho đường tròn (C) tâm I bán kính R. Từ điểm C nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với hai tiếp điểm M,N. MN có phương trình x – 4y + 3 = 0. Đường thẳng CI cắt (C) tại hai điểm K, H (CK < CH). Biết rằng khoảng cách từ K đến CM là $\sqrt{17}$, điểm H thuộc đường thẳng: 5x + y – 1 = 0, điểm K thuôc đường thẳng 2x – y – 7 = 0. Tìm phương trình đường tròn (C) biết K có tung độ âm.

Đáp án



Gọi K(a;2a-7) ; H(b; 1-5b)

Ta có $\widehat{CMK}=\widehat{MNK}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung)

Mà ta có KN = KM => $\widehat{KMN}=\widehat{MNK}$

Nên có MK là tia phân giác góc $\widehat{CMN}$ nên ta có được : $d_{(K;CM)}=d_{(K;MN)}=\sqrt{17}$

Ta có : $\dfrac{|a-4(2a-7)+3|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17} \Leftrightarrow |31-7a|=17 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=\dfrac{38}{7}\end{array}\right.$

Với $y_K<0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow K(2;-3)$

Lại có : $KH\perp MN \Rightarrow \overrightarrow{KH}.\overrightarrow{u_{MN}}=0$ ⇔4(b-2)+4-5b=0 => b= -4

⇨ H(-4; 21)

Ta có I là trung điểm KH => I(-1;9)



Và bán kinh đường trong (I;R) có : R =IK=3 $\sqrt{17}$

Vậy (C) : $(x+1)^2+(y-9)^2=153$

Câu 9. (Đề 22 – thầy Quang Baby) :

Cho hình vuông ABCD, A(1;4), vẽ hai đường tròn (C_1) có đường kính AD và (C_2) có bán kính AD tâm D. Lấy điểm P nằm trên đường tròn (C_2), AP có phương trình x + y – 5 = 0. Đường thẳng DP cắt đường tròn (C_1) tại N, AN có phương trình 3x – 5y + 17 = 0. Tìm các đỉnh hình vuông biết rằng x_C > 0, điểm E(7; -2) thuộc đường thẳng BC.

Đáp án

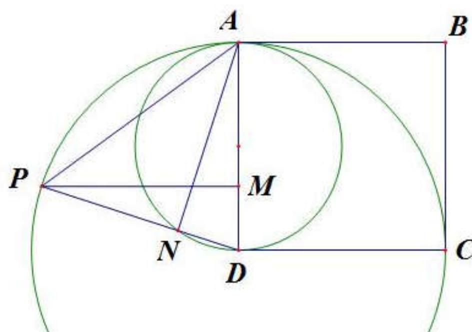
+) Gọi $\vec{n}$ =(a;b) là vecto pháp tuyến của AB

Ta có $\overrightarrow{u_1}$ =(1;1) là vecto pháp tuyến của AP

$\overrightarrow{u_2}$ = (3;-5) là vecto pháp tuyến của AN

Ta sẽ chứng minh cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)$=cos$\left(\overrightarrow{u_1};\vec{n}\right)$

*) Trường hợp 1: Điểm P nằm ngoài hình vuông ABCD:



+) Vì N∈(C_1) có đường kính AD nên $\widehat{AND}=90^o$ hay AN⊥ DP

Vì A,P∈ (C_2) nên DA = DP

→ ΔDAP cân tại D

Từ P kẻ PM ⊥ AD tại M. Dễ thấy PM // AB → $\vec{n}$ =(a;b) cũng là vecto pháp tuyến của PM

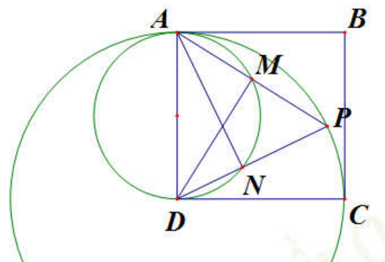
Ta có: $\widehat{DAP}=\widehat{DPA}$ do ΔDAP cân tại D



$\rightarrow \widehat{NAP} = \widehat{MPA}$

Do đó cos $\widehat{NAP}$ = cos $\widehat{MPA}$ $\Leftrightarrow$ cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)$=cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{n}\right)$ (đúng)

*) Trường hợp 2: P nằm bên trong hình vuông ABCD:



Gọi M là giao điểm của AP với đường tròn (C_1) $\rightarrow$ AM $\perp$ MD

Vì A,P cùng nằm trên đường tròn (C_2) nên DA=DP

Do đó tam giác DAP cân tại D

$\rightarrow$ Đường cao DM đồng thời là phân giác

$\rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

$\rightarrow \widehat{PAN} = \widehat{BAP}$

Nên cos $\widehat{PAN}$ = cos $\widehat{BAP}$ $\Leftrightarrow$ cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)$ = cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{n}\right)$

***Vậy ta có cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)$ = cos$\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{|3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{34}.|a+b|$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2) = 34(a^2+2ab+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 30a^2+68ab+30b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a=-5b \\ 5a=-3b \end{array}\right.$$

-) Nếu 5a = -3b . Lấy a = 3 ; b = -5 $\rightarrow$ loại vì khi đó AB // AN



-) Nếu 3a = -5b . Lấy a = 5 ; b = -3

$\rightarrow$ phương trình AD đi qua A(1;4) nhận (3;5) là một vecto pháp tuyến là

3x + 5y - 23 = 0

Phương trình đường thẳng AB là: 5x – 3y +7 = 0

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm E(-7;2) là: 3x + 5y + 11 = 0

Do đó tọa độ của B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 5x - 3y + 7 = 0 \\ 3x + 5y + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{B}(-2;-1) \quad \rightarrow \text{AB}=\sqrt{34}$$

Vì C$\in$BC $\rightarrow$ C$\left(c;\dfrac{-3c-11}{5}\right)$. (c>0)

Lại có BC=AB= $\sqrt{34}$

$$\rightarrow (c+2)^2+\left(\frac{-3c-6}{5}\right)^2=34$$

$$\rightarrow \frac{34}{25}c^2+\frac{136}{25}c-\frac{714}{25}=0$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} c=3 \\ c=-7 \end{array}\right. \rightarrow \text{c=3 (vì c>0)}$$

Do đó C(3;-4)

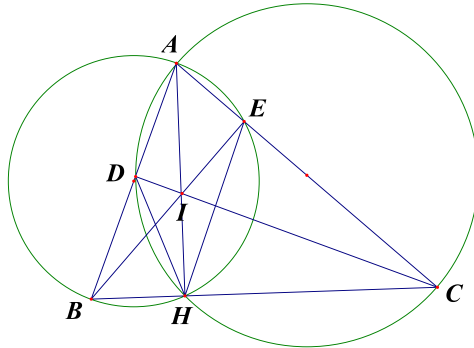
+) Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \rightarrow$ D(6;1)

Kết luận: Vậy tọa độ 4 đỉnh của hình vuông ABCD là A(1;4) B(-2;-1) C(3;-4) D(6;1)

Bài 10. Cho tam giác ABC, BC song song với đường thẳng x – y + 10 = 0, A(2;0). Kẻ đường cao AH. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH cắt tia CA tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt tia CB tại D. Biết rằng EH qua điểm K(7;3) và vuông góc với đường thẳng 3x + y +5 = 0. Tìm tọa độ điểm D biết rằng D thuộc đường tròn $(x-2)^2+(y-1)^2=9$

Đáp án





+) Gọi I là giao điểm của AH và CD

Có $\widehat{CDA} = 90^o$ (chắn nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC)

$\rightarrow$ CD $\perp$ AB $\rightarrow$ I là trực tâm của tam giác ABC

Tương tự ta có BE $\perp$ AC $\rightarrow$ ba điểm B, I, E thẳng hàng

+) Dễ thấy tứ giác DIHB nội tiếp $\left(\widehat{IHB} + \widehat{BDI} = 180^o\right)$

$\rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AHD}$

Lại có: $\widehat{AHE} = \widehat{ABE}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AE}$)

$\rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AHD}$ hay HA là phân giác góc $\widehat{DHE}$

+) Phương trình EH : x – 3y + 2 = 0

Phương trình AH đi qua A(2;0) và vuông góc với BC là: x – y = 2

H là giao điểm của EH và AH $\rightarrow$ H(1;1)

Phương trình BC đi qua H(1;1) và song song với đường thẳng x – y + 10 =0 là:

x – y = 0

+) Lấy điểm M(4;2) thuộc EH. Lấy M' đối xứng với M qua AH

$\rightarrow$ M' $\in$ HD và MM' $\perp$ AH do AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến của tam giác AMM'

Phương trình MM' đi qua M và vuông góc với AH là:

x – y = 2

Trung điểm F của MM' là giao điểm của MM' và AH$\rightarrow$ F(2;0)$\rightarrow$M'(0;-2)

$\overrightarrow{HM'}$ = (-1;-3) $\rightarrow$ Phương trình đường thẳng HD:

3x – y – 2 = 0



D là giao điểm của HD với đường tròn $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ nên tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\(x-2)^2+(y-1)^2=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2\\(x-2)^2+(3x-2-1)^2=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}\Leftrightarrow D(2;4)\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{5}\\y=-\dfrac{7}{5}\end{cases}\Leftrightarrow D\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{7}{5}\right)\end{array}\right.$$

- Nếu D(2;4), ta xét vị trí tương đối của D và A với EH được:

$(2-3.4+2)(2-3.0+2)=-32<0$

$\rightarrow$ D và A nằm khác phía so với BH (loại)

- Nếu D $\left(\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$, ta xét vị trí tương đối của D và A với EH được:

$\left[\frac{1}{5}-3.\left(-\frac{7}{5}\right)+2\right](2-3.0+2)=\frac{128}{5}>0$

$\rightarrow$ D và A nằm cùng phía so với BH (nhận)

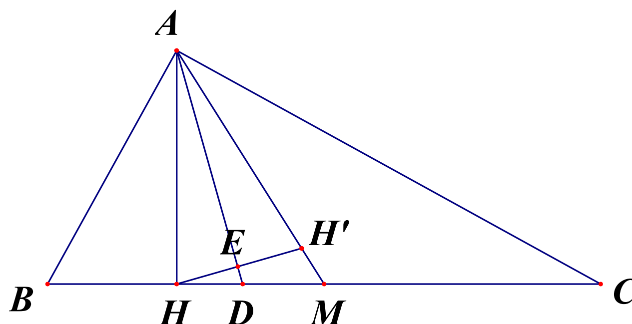
Vậy D $\left(\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$

Bài 11. (Đề thi của sở Hà Nội):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H(5;5) là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ nằm trên đường thẳng x – 7y +20 = 0. Đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC đi qua K(-10;5). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng B có tung độ dương.



Đáp án



+) Gọi AD là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ (D thuộc BC)

$\rightarrow$ AD: x – 7y + 20 = 0

+) Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MAC} = \widehat{MCA} \\ \widehat{ACB} = \widehat{BAH} \end{cases} \rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{BAH}$$

Mà $\widehat{BAH} + \widehat{HAD} = \widehat{BAD} = \widehat{MAC} + \widehat{MAD}$

$\rightarrow$ $\widehat{HAD} = \widehat{MAD} \rightarrow$ AD là phân giác góc $\widehat{HAM}$

+) Kẻ HH' $\perp$ AD cắt AM tại H'$\Rightarrow$ H, H' đối xứng qua AD

HH' $\cap$ AD = {E}

Phương trình HH' đi qua H(5;5) và vuông góc với AD là:

7x + y – 40 = 0

E là giao điểm của HH' và AD $\Rightarrow$ E$\left(\frac{26}{5};\frac{18}{5}\right)$ $\Rightarrow$H'$\left(\frac{27}{5};\frac{11}{5}\right)$

$\overrightarrow{H'K} = \left(-\frac{77}{5};\frac{14}{5}\right) = -\frac{7}{5}(11;-2) \Rightarrow$ Phương trình AM đi qua K(-10;5):

2x + 11y – 35 = 0

A là giao điểm của AM và AD$\rightarrow$ A(1;3)

$\overrightarrow{AH} = (4;2) = 2(2;1)$ $\Rightarrow$Phương trình BC đi qua H và vuông goc với AH là:

2x + y – 15 = 0

Điểm M là giao điểm của AM và BC $\to$ M$\left(\frac{13}{2};2\right)$

+) Vì B nằm trên đường thẳng BC $\to$ B(b ; 15 – 2b)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ = (b-1 ; 12-2b) và C(13-b; -11+2b)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC} = (12-b;-14+2b)$

Vì AB $\perp$ AC $\Rightarrow$ (b – 1)(12 – b) + (12 – 2b)(-14 +2b)=0

$\Leftrightarrow -5b^2+65b-180=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=9 \to B(9;-3) \\ b=4 \to B(4;7) \end{array}\right.$

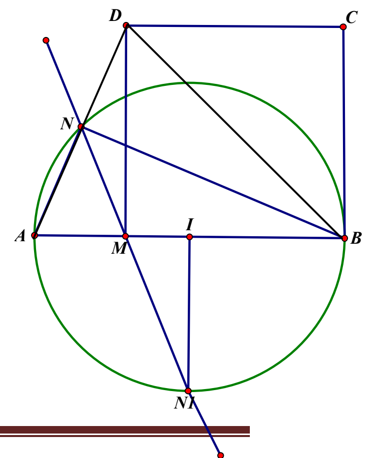
Vì B có tung độ dương $\to$ B(4;7)

Khi đó C(9;-3)

Vậy A(1;3) B(4;7) C(9;-3)

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại B và C có AB > CD và CD = BC. Đường tròn đường kính AB có phương trình $x^2+y^2-4x-5=0$ cắt cạnh AD của hình thang tại điểm thứ hai N. Gọi M là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng AB. Biết điểm N có tung độ dương và đường thẳng MN có phương trình 3x + y – 3 = 0,tìm tọa độ của các đỉnh A,B,C,D của hình thang ABCD.

Đáp án



+) $N \in MN \cap (C) \Rightarrow$ tọa độ N là nghiệm của hệ phương trình:

$\left\{\begin{array}{l} 3x+y-3=0 \\ x^2+y^2-4x-5=0 \end{array}\right.$, do N có tung độ dương nên $N\left(\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right); N_1(2;-3)$



+) Tứ giác BMND nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{BDM} = 45^0 \Rightarrow MN$ là đường phân giác góc $\widehat{BNA} \Rightarrow N_1$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow IN_1 \perp AB$ với $I(2;0)$ là tâm của $(C) \Rightarrow AB: y = 0$.

+) $M = MN \cap AB \Rightarrow M(1;0)$, A, B là các giao điểm của đt AB và $(C) \Rightarrow A(-1;0)$ và $B(5;0)$ hoặc $A(5;0)$ và $B(-1;0)$. Do $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ nên $A(-1;0)$ và $B(5;0)$

+)$AN: 2x - y + 2 = 0, MD: y = 1 \Rightarrow D = AN \cap MD \Rightarrow D(1;4)$

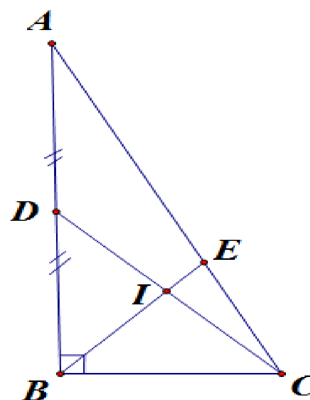
$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow C(5;4)$

Vậy A(-1;0) B(5;0) C(5;4)

Câu 13. (THPT Tam Đảo – 2016):

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, AB = 2BC, D là trung điểm của AB. Điểm E thuộc đoạn AC sao cho AC = 3EC. Biết phương trình đường thẳng CD: x – 3y + 1 = 0, $E\left(\frac{16}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng điểm A có hoành độ dương.

Đáp án



Gọi $BE \cap CD \equiv I$

Ta có $\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow E$ là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$.

$BD = BC \Rightarrow BE \perp CD \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BE: 3x + y - 17 = 0$.

$BE \cap CD \equiv I \Rightarrow I(5;2)$

Đặt $BC = x > 0 \Rightarrow AB = 2x, AC = x\sqrt{5}, EC = \frac{x\sqrt{5}}{3}$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{CEB} = 45^0 \Rightarrow IC = IB = BC.\cos 45^0 = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ &IE^2 = CE^2 - CI^2 \Rightarrow IE = \frac{x}{3\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IE} \Rightarrow B(4;5)$$



$C \in CD \Rightarrow C(3a-1;a)$

$BC = BI\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{5} \Rightarrow a^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=3 \end{array}\right.$

Với $a=1$ thì $C(2;1), A(12;1)$

Với $a=3$ thì $C(8;3), A(0;-3)$

DẠNG 2 : CHO ĐƯỜNG PHÂN GIÁC (BÀI TOÁN THUẬN)

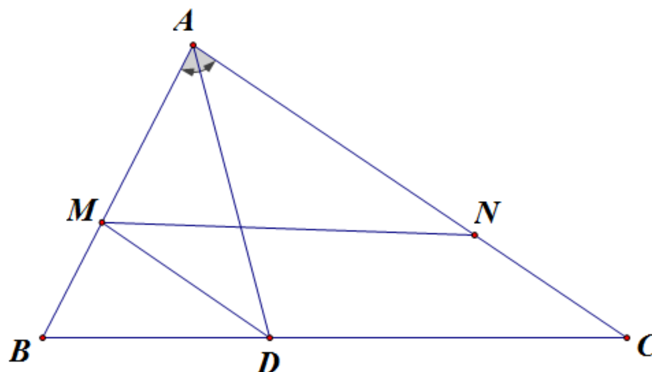
SƯU TẬP TUYỂN CHỌN

GIÚP CÁC EM NHÌN LẠI CÁC TÍNH CHẤT PHẦN TRÊN THẦY ĐÃ ĐƯA

Bài 1 (Đề số 24 – 25 Đề thi thử Quảng Ninh 2015)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N sao cho $AM = CN$. Biết rằng $M(-4;0), C(5;2)$ và chân đường phân giác trong của góc A là $D(0;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B của ΔABC.

Bài giải:



Gọi D' là điểm trên cạnh BC sao cho $CD' = MN$.

Ta có $\square MNCD'$ là hình bình hành $\Rightarrow MD' = CN = AM \Rightarrow \Delta AMD'$ cân tại M.



$\Rightarrow \widehat{MD'A} = \widehat{MAD'} = \widehat{D'AC} \Rightarrow AD'$ là phân giác của góc $A \Rightarrow D' \equiv D$

•CA qua C và song song với $MD \Rightarrow CA$ có VTCP là $\overrightarrow{MD} = (4;-1) \Rightarrow AC: \begin{cases} x = 5+4t \\ y = 2-t \end{cases}$

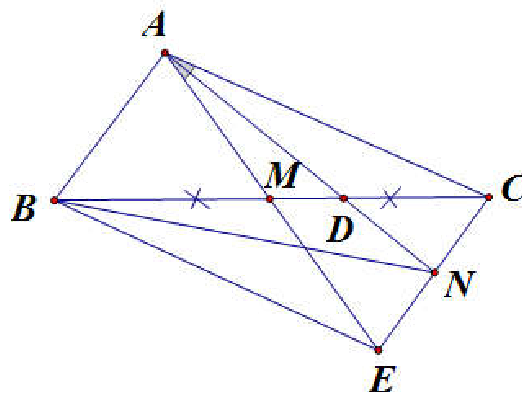
$A \in AC \Rightarrow A(5+4t;2-t) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (9+4t;2-t)$

Ta có $MA = MD \Leftrightarrow (9+4t)^2 + (2-t)^2 = 17 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow A(-3;4)$

- Vậy $A(-3;4)$.

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC đỉnh $B(4;-3)$. Gọi M là trung điểm của BC, D là giao điểm phân giác trong góc $\widehat{MAC}$ và cạnh BC. Biết rằng $BC = 3CD$, đường thẳng AD có phương trình $3x-2y-5=0$, $S_{ABC} = \frac{39}{4}$. Tìm tọa độ đỉnh A và C biết $x_C > 0$.

Bài giải:



Dựng hình bình hành $ABEC$, gọi N là trung điểm của CE

Ta có $BC = 3CD \Rightarrow CD = 2DM \Rightarrow D$ là trọng tâm ΔACE, AN là phân giác trong ΔACE cân tại $A \Rightarrow AN \perp CE$. Mà $AB // CE \Rightarrow AN \perp AB$ hay $AD \perp AB$.

Đường thẳng AB đi qua B vuông góc với AD nên có phương trình: $2x+3y+1=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 3x-2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A(1;-1)$



Ta có $d(B;AD)=\sqrt{13}$ và $S_{ABC}=\frac{BD}{BC}S_{ABC}=\frac{2}{3}.\frac{39}{4}=\frac{13}{2}=\frac{1}{2}BA.AD\Rightarrow AD=\frac{13}{AB}=\sqrt{13}$

Gọi $D\left(a;\frac{3a-5}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BD}\Rightarrow C\left(\frac{3a-4}{2};\frac{9a-9}{4}\right)$.

Vì $x_C>0\Rightarrow a>\frac{4}{3}$

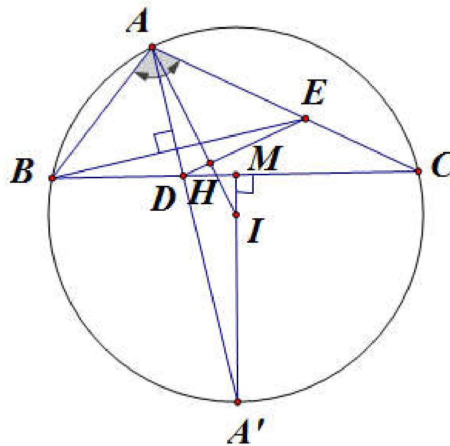
Ta có $AD=\sqrt{13}\Rightarrow\sqrt{(a-1)^2+\left(\frac{3a-5}{2}+1\right)^2}=\sqrt{13}\Leftrightarrow|a-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=-1\end{array}\right.$

Vì $a>\frac{4}{3}\Rightarrow a=3\Rightarrow C\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$

- Vậy $A(1;-1),C\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ $(AC>AB)$. Gọi $D\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ là chân đường phân giác trong góc A, $E(-1;0)$ là một điểm thuộc đoạn AC thỏa mãn $AB=AE$. Tìm tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$ biết phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $x^2+y^2+x-2y-30=0$ và A có hoành độ dương.

Bài giải:





Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$ bán kính $R=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Gọi $AI\cap DE\equiv H$.

Xét 2 tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle AED$:

$AB=AE,\widehat{BAD}=\widehat{EAD},AD$ chung $\Rightarrow \triangle ABD=\triangle AED\ (c-g-c).\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{ABC}.$

Ta có: $\widehat{HAE}=\widehat{ICA}=\frac{180^0-\widehat{AIC}}{2}=90^0-\widehat{ABC}\Rightarrow \widehat{AED}+\widehat{HAE}=\widehat{ABC}+\left(90^0-\widehat{ABC}\right)$

$\Rightarrow \widehat{AHE}=90^0\Rightarrow AI\perp DE$

Đường thẳng AI đi qua I và vuông góc với DE nên có phương trình là $2x-y+2=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-y+2=0\\ x^2+y^2+x-2y-30=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ y=-4\end{cases}\end{array}\right.$

Vì $x_A>0\Rightarrow A(2;6)$

Đường thẳng AD có phương trình là $x-2=0$.

Gọi A' là giao điểm thứ 2 của AD với đường tròn (C) thì $A'(2;-4)$.

Đường thẳng BC đi qua D và vuông góc với IA' có phương trình là $x-2y-5=0$.

Tọa độ điểm B,C thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-2y-5=0\\ x^2+y^2+x-2y-30=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ y=-4\end{cases}\end{array}\right.$

$\Rightarrow B(5;0),C(-3;-4)$ hoặc $B(-3;-4),C(5;0)$.

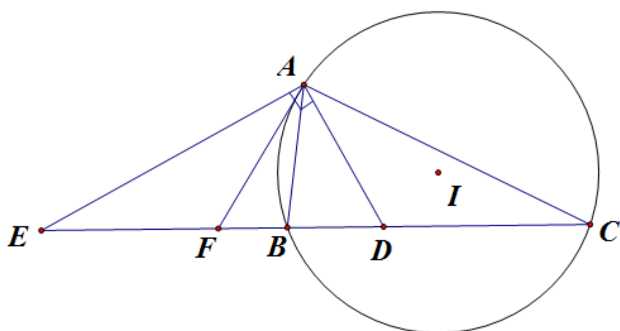
Vì $AC>AB$ nên ta có $B(5;0),C(-3;-4)$.

- Vậy $A(2;6),B(5;0),C(-3;-4)$.



Bài 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có $B\left(\frac{21}{5};\frac{3}{5}\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $x+2y-7=0$. Đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$ cắt BC kéo dài tại điểm $E(9;3)$. Tìm tọa độ đỉnh A biết $y_A>0$.

Bài giải:



Đường thẳng BC đi qua B,E có phương trình là $x-2y-3=0$.

Gọi F là giao điểm tiếp tuyến và đường thẳng BC.

Tọa độ của F là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y-3=0\\x+2y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}\Rightarrow F(5;1)$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$.

Ta có $\widehat{ADF}=\widehat{DAC}+\widehat{ACD}$ (Tính chất góc ngoài $\triangle ACD$)

Mà $\widehat{ACD}=\widehat{ACB}=\widehat{FAB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB};\ \widehat{ADC}=\widehat{DAB}$

$\Rightarrow\widehat{ADF}=\widehat{FAB}+\widehat{DAB}=\widehat{DAF}\Rightarrow\triangle FAD$ cân tại $F\Rightarrow FA=FD\quad(1)$

Mặt khác $\widehat{DAE}=90^0$ (Phân giác ngoài và phân giác trong của tam giác) nên ta có: $90^0=\widehat{FAE}+\widehat{FAD}=\widehat{FEA}+\widehat{FDA}\Rightarrow\widehat{FAE}=\widehat{FEA}\Rightarrow\triangle FAE$ cân tại $F\Rightarrow FA=FE\quad(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow FD=FE$ hay F là trung điểm của $ED\Rightarrow D(1;-1)$.

Gọi $A(7-2a;a)$ với $a>0$.



Ta có $\overrightarrow{AD}=(2a-6;-1-a), \overrightarrow{AE}=(2a+2;a+3), AD\perp AE \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=0$

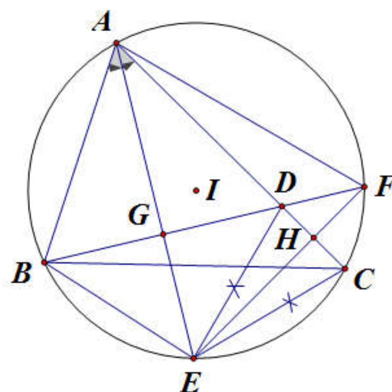
$$\Rightarrow (2a-6)(2a+2)+(-a-1)(-a+3)=0 \Leftrightarrow a^2-2a-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$$

Vì $a>0$ nên $a=3 \Rightarrow A(1;3)$.

- Vậy $A(1;3)$.

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ nhọn $(AC>AB)$. Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại điểm $E(-4;-4)$ $(E\neq A)$. Gọi $D(1;1)$ là điểm trên cạnh AC sao cho $ED=EC$, tia BD cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại điểm thứ hai $F(4;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$.

Bài giải:



Vì E là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ nên $EB=EC$.

Theo giả thiết $ED=EC$.

$\Rightarrow EB=ED \quad (1)$

$\triangle EDC$ cân $\Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{EDC} \Rightarrow \widehat{ADE}=180^0-\widehat{ACE}$

Lại có $\square ABEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABE}=180^0-\widehat{ACE}$

$\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{ABE} \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AE$ là trung trực của $AD \Rightarrow AE\perp BD \quad (3)$

Ta có: $\widehat{DCF}=\widehat{ABF}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AF}$ (Góc nội tiếp)

$\widehat{CDF}=\widehat{ADB}$ (Hai góc đối đỉnh); $\widehat{ADB}=\widehat{ABF}$ ($\triangle ABD$ cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{DCF}=\widehat{CDF} \Rightarrow \triangle CDF$ cân tại $F \Rightarrow FD=FC$.

Lại có $ED=EC \Rightarrow EF$ là trung trực của $CD \Rightarrow EF\perp AD \quad (4)$

Từ $(3),(4) \Rightarrow D$ là trực tâm của $\triangle AEF$.



Đường thẳng AC qua D vuông góc với EF nên có phương trình là $2x+y-3=0$.

Đường thẳng AE qua E vuông góc với DF nên có phương trình là $3x-y+8=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y-3=0\\3x-y=8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}\Rightarrow A(-1;5)$

Gọi $EF\cap AD\equiv H\Rightarrow H$ là trung điểm của CD.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y-3=0\\x-2y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\Rightarrow H(2;-1)$

Vì H là trung điểm của CD nên $C(3;-3)$

Đường thẳng BF đi qua D,F nên có phương trình là $x+3y-4=0$

Gọi $BF\cap AE\equiv G\Rightarrow G$ là trung điểm của BD, tọa độ của G là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases}x+3y-4=0\\3x-y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}\Rightarrow G(-2;2)$

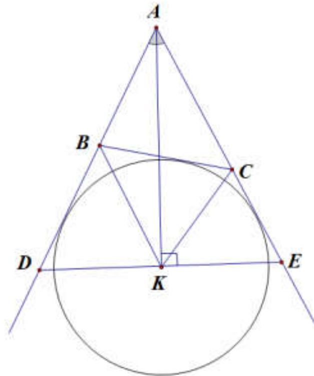
Vì G là trung điểm BD nên $B(-5;3)$.

- Vậy $A(-1;5),B(-5;3),C(3;-3)$.

Bài 7: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $\mathrm{Ox}y$, cho $\triangle ABC$ có đỉnh $B(2;9)$ và tâm đường tròn bàng tiếp góc A là $K(14;15)$. Đường thẳng đi qua K và vuông góc với AK cắt các đường thẳng AB,AC lần lượt tại D,E thỏa mãn $BD.CE=288$. Tìm tọa độ các đỉnh A,C biết D có hoành độ dương nằm trên đường thẳng $10x-y+7=0$.

Bài giải:





Ta có $\triangle ADE$ cân tại A (Do đường cao đồng thời là phân giác) $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E} \quad (1)$

Trong $\square BDCE$ có $\widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{C} + \widehat{E} = 360^0 \Rightarrow \widehat{KBD} + \widehat{KCE} + \widehat{E} = 180^0$

Lại xét $\triangle KCE$: $\widehat{CKE} + \widehat{KCE} + \widehat{E} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{KBD} \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow \triangle DBK$ đồng dạng $\triangle EKC \Rightarrow \dfrac{DB}{EK} = \dfrac{DK}{EC} \Leftrightarrow BD.CE = DK.EK = EK^2 \quad (*)$

Theo bài ra $BD.CE = 288 \Rightarrow DK^2 = 288$

Gọi $D(a;10a+7), a > 0$ ta có phương

trình: $(a-14)^2 + (10a-8)^2 = 288 \Leftrightarrow 101a^2 - 188a - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -\dfrac{14}{101} \end{array}\right.$

Mà $a < 0 \Rightarrow D(2;27)$. Vì K là trung điểm của DE nên $E(26;3)$.

Đường thẳng AB đi qua B, D nên có phương trình $x - 2 = 0$.

Đường thẳng AK đi qua K và vuông góc với DE nên có phương trình là $x - y + 1 = 0$.

Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2;3)$

Đường AC đi qua A, E nên có phương trình là $y - 3 = 0$.

Đường thẳng BC đối xứng với AB qua đường thẳng KB nên có phương trình $3x + 4y - 42 = 0$.

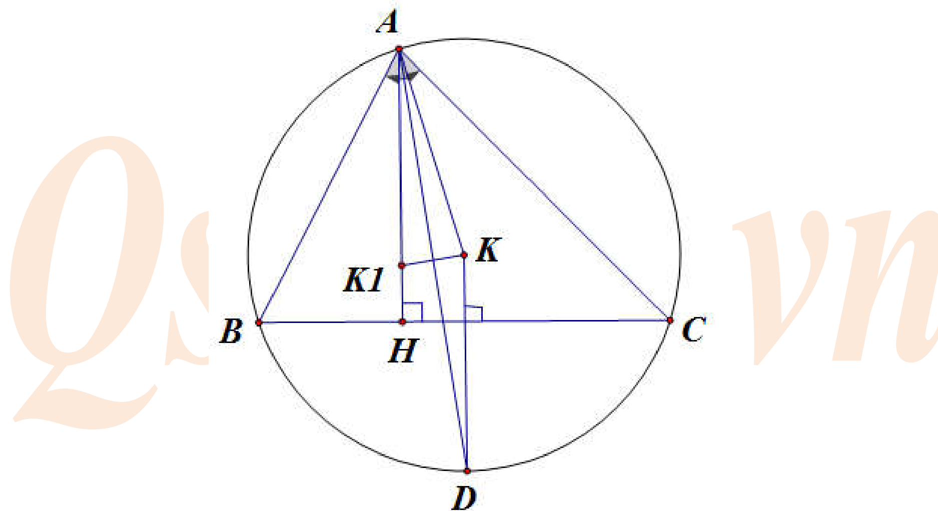


Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y-3=0 \\ 3x+4y-42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C(10;3)$

- Vậy $A(2;3), C(10,3)$.

Bài 8: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ nôi tiếp đường tròn (K). Gọi H là hình chiếu của A lên BC (H thuộc đoạn BC). Đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ có phương trình $x+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C biết $K\left(\frac{5}{8};-\frac{1}{4}\right), H\left(-\frac{13}{5};-\frac{1}{5}\right)$ và $x_B<0$.

Bài giải:



Gọi D là giao điểm của phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với đường tròn $(K) \Rightarrow D$ là điểm chính giữa cung $\widehat{BC} \Rightarrow KD \perp BC \Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{ADK} = \widehat{DAK}$ (Do $AH // KD, KD = KA$) hay AD là phân giác góc $\widehat{HAK}$.

Gọi K_1 là điểm đối xứng của K qua $AD \Rightarrow K_1 \in AH \Rightarrow K_1\left(-\frac{21}{8};-\frac{1}{4}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AH: 2x-y+5=0$.

Tọa độ của A là nghiêm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+1=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(-1;3)$



Phương trình đường thẳng $BC: x+2y+3=0$

Phương trình đường tròn $(K):\left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{845}{64}$

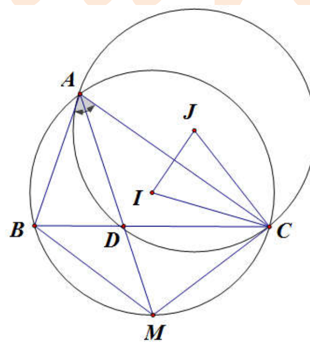
Tọa độ của B,C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ \left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{845}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

Mà $x_B<0 \Rightarrow B(-3;0), C(3;-3)$.

- Vậy $B(-3;0), C(3;-3)$.

Bài 9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm $I(2;2)$, điểm D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại điểm thứ hai M $(M \neq A)$. Tìm tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$ biết điểm $J(-2;2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$ và phương trình đường thẳng CM là $x+y-2=0$.

Bài giải:



Ta có $\begin{cases} \widehat{BCM}=\widehat{BAM}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM} \\ \widehat{BAM}=\widehat{MAC} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC}=\widehat{DCM} \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của đường tròn (J)

$\Rightarrow MC \perp JC$

Phương trình đường thẳng $JC: x-y+4=0$



Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;3)$

Lại do JI nằm trên đường trung trực của đoạn $AC \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AC: x+1=0.$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là: $(I):(x-2)^2+(y-2)^2=10$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+1=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-1;1)$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y-2=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Rightarrow M(3;-1)$

Phương trình đường thẳng $BC: x-3y+10=0.$

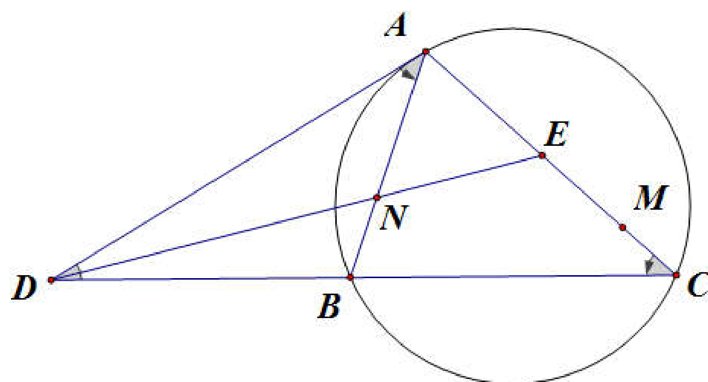
Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y+10=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right)$

- Vậy $A(-1;1), B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right), C(-1;3).$

Bài 10: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $\mathrm{Ox}y$, cho $\triangle ABC$ có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cắt BC tại điểm D. Biết đường phân giác trong của góc $\widehat{ADB}$ là $d: x-y+2=0$; điểm $M(-4;1) \in AC$. Viết phương trình cạnh AB.

Bài giải:





Phương trình đường thẳng $AC: 3x-5y+17=0.$

Gọi $d \cap AC \equiv E; AB \cap DE \equiv N.$

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x-5y+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=\dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{11}{2}\right)$

Lại có $\begin{cases} \widehat{ANE}=\widehat{DAN}+\widehat{ADN} \\ \widehat{AED}=\widehat{EDC}+\widehat{ECD} \end{cases}$

Mà $\widehat{DAB}=\widehat{ACD}$ và $\widehat{ADE}=\widehat{EDB}$ (Do các tính chất tiếp tuyến và phân giác)

$\Rightarrow \triangle ANE$ cân tại $A.$

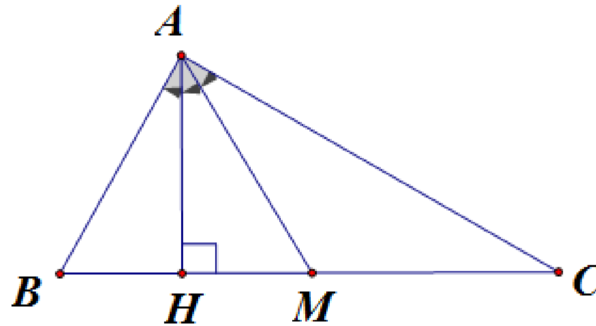
Giả sử $N(n;n+2)$, từ $AN=AE \Rightarrow N\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

- Vậy phương trình đường thẳng $AB: 5x-3y+7=0.$

Bài 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có $H(1;1)$ là chân đường cao kẻ từ A, $M(3;0)$ là trung điểm của BC. Biết $\widehat{BAH}=\widehat{HAM}=\widehat{MAC}$. Tìm tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$

Bài giải:





Ta có $AH \perp BM, \widehat{BAH} = \widehat{MAH} \Rightarrow \triangle ABM$ cân tại A

H là trung điểm $BM \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_H - x_M = -1 \\ y_B = 2y_H - y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-1;2).$

M là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_M - x_B = 7 \\ y_C = 2y_M - y_B = -2 \end{cases} \Rightarrow C(7;-2)$

Ta có AM là phân giác của góc $\widehat{HAC} \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{HAM} = 30^0$

$\Rightarrow AH = HM\sqrt{3} = \sqrt{15}$

Đường thẳng AH đi qua H và nhận $\overrightarrow{HM} = (2;-1)$ là VTPT nên có phương trình:

$2(x-1)-(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-1=0.$

$A \in AH \Rightarrow A(a;2a-1)$

Ta có $AH = \sqrt{15} \Rightarrow (a-1)^2 + (2a-2)^2 = 15 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow A\left(1+\sqrt{3};1+2\sqrt{3}\right)$ hoặc

$A\left(1-\sqrt{3};1-2\sqrt{3}\right).$

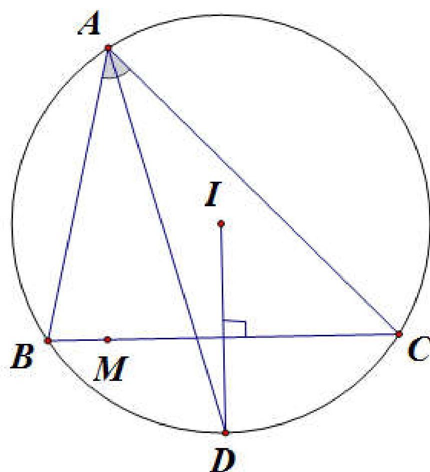
- Vậy $A\left(1+\sqrt{3};1+2\sqrt{3}\right), B(-1;2), C(7;-2)$ hoặc $A\left(1-\sqrt{3};1-2\sqrt{3}\right), B(-1;2), C(7;-2).$

Bài 12: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) và có đường phân giác trong góc A nằm trên đường thẳng



$d: x+y=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$, biết đường thẳng BC đi qua $M(3;-4)$ và điểm A có $x_A<0$.

Bài giải:



$(C): x^2+y^2-4x+2y-20=0 \Rightarrow$ Tâm $I(2;-1)$

Tọa độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-4x+2y-20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases} \end{array}\right.$$

A là giao điểm của d và (C) mà $x_A<0 \Rightarrow A(-2;2)$

Gọi $D(5;-5)$ là giao điểm thứ hai của d và (C).

Do AD là phân giác trong góc $A \Rightarrow DB=DC \Rightarrow ID$ là trung trực của BC.

Đường thẳng BC qua M và nhận $\overrightarrow{ID}=(3;-4)$ là VTPT nên có phương trình

$3(x-3)-4(y+4)=0 \Leftrightarrow 3x-4y-25=0.$



Tọa độ điểm B,C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3x-4y-25=0\\x^2+y^2-4x+2y-20=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=7\\y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=-\dfrac{29}{5}\end{cases}\end{array}\right.$

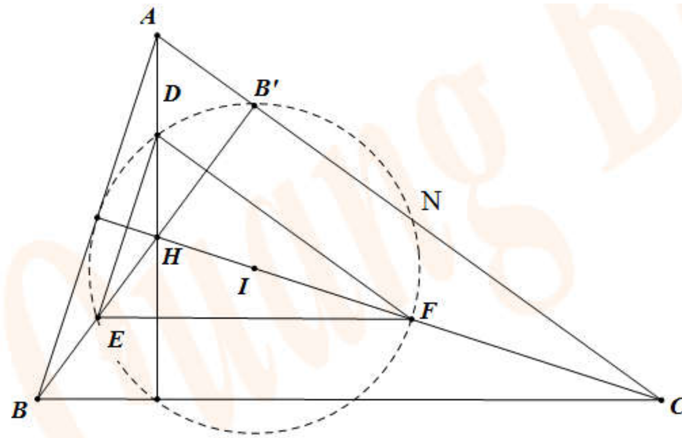
- Vậy $B(7;-1), C\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{29}{5}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{29}{5}\right), C(7;-1)$.

TRỰC TÂM TAM GIÁC

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, AC lần lượt là $4x-3y-20=0; 2x+y+10=0$. Đường tròn (C) đi qua trung điểm của các đoạn HA, HB, HC có phương trình là $(x-1)^2+(y+2)^2=25$, trong đó H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ H biết C có hoành độ lớn hơn -4.

Hướng dẫn giải





* Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-2y-20=0 \\ 2x+y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow A(-1;-8)$

* Gọi D, E, F, N lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC, AC và B' là chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases} EF//BC \\ NF//AH \Rightarrow EF \perp NF \\ BC \perp AH \end{cases}$. Tương tự ta có: $ED \perp DN$

Vậy đường tròn (C) đi qua D, E, F là đường tròn đường kính EN.

Suy ra N thuộc (C). Mặt khác $EB' \perp B'N \Rightarrow B' \in (C)$

* Tọa độ N và B' là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+10=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; y=-6 \\ x=-4; y=-2 \end{array} \right.$

Nếu $N(-4;-2)$ thì $C(-7;4)$ (loại)

Nếu $N(-2;-6)$ thì $C(-3;-4)$. Vậy $N(-2;-6), B'(-4;-2), C(-3;-4)$

* Đường thẳng BH đi qua B' và nhận vectơ chỉ phương $(1;-2)$ của AC là pháp tuyến nên có phương trình là $x-2y=0$.

* Đường thẳng HC đi qua C và nhận vectơ chỉ phương $(3;4)$ của AB làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $3x+4y+25=0$

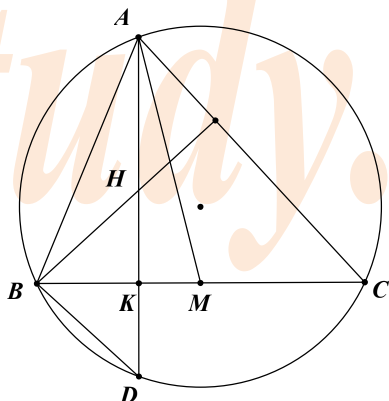


Khi đó tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+4y+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=\dfrac{-5}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(-5;\dfrac{-5}{2}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $H\left(-5;\dfrac{-5}{2}\right)$

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x+5y-8=0, x-y-4=0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC; biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Hướng dẫn giải:



* Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC,

K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC.

Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d.

Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$$



* AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của $AD: 1(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$.

* Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+5y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$

* Tứ giác HKCE nội tiếp nên $BHK = KCE$, mà $KCE = BDA$ (nội tiếp chắn cung AB)

Suy ra $BHK = BDK$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$

* Do B thuộc $BC \Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$

$\overrightarrow{HB}(t-2t;t-8);\overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=7 \end{array}\right.$$

* Do $t \le 3 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(2;-2), C(5;1)$. Ta có:

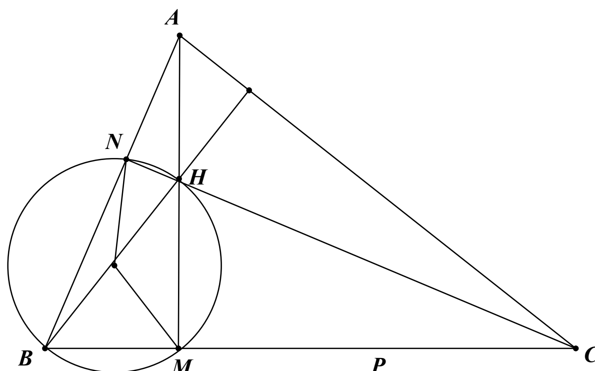
$\overrightarrow{AB}=(1;-3), \overrightarrow{AC}=(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}}=(3;1), \overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$

* Suy ra $AB: 3x+y-4=0; AC: y-1=0$

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$

Hướng dẫn giải





* Ta thấy tứ giác BHMN nội tiếp suy ra I là trung điểm của BH;

Ta có: $B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$

* Suy ra $H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP} = (2t-1;-t-2)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2)=0 \Leftrightarrow 5t^2+10t+5=0 \Leftrightarrow t=-1$

* Suy ra $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH} = (1;-3)$, đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

* Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Tìm được tọa độ $C(-5;-4)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $B(4;-1), C(-5;-4)$

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và có trực tâm H thuộc đường thẳng $d: x-4y-5=0$. Biết đường thẳng AB có phương trình $2x+y-14=0$ và khoảng cách từ C đến AB bằng $3\sqrt{5}$. Tìm tọa độ điểm C, biết hoành độ điểm C nhỏ hơn 2.

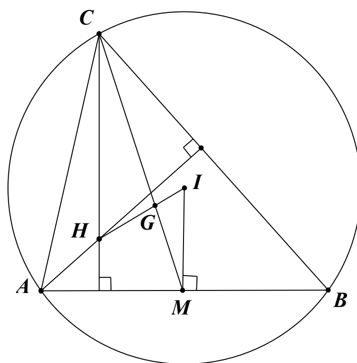
Hướng dẫn giải:

* Do H thuộc d nên $H(4t+5;t)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

Ta có: $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow G\left(\dfrac{4t+7}{3};\dfrac{t+4}{3}\right)$



* Mặt khác, ta có: $d\left(C;AB\right)=3\left(G;\text{AB}\right)\Leftrightarrow 3\sqrt{5}=3.\frac{|3t-8|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{13}{3}\end{array}\right.$



* Gọi M là trung điểm AB, suy ra tọa độ M là hình chiếu của I trên AB nên $M\left(5;4\right)$

*

Với t = 1 ta có $G\left(\frac{11}{5};\frac{5}{3}\right)$. Từ $\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow C\left(1;-3\right)$

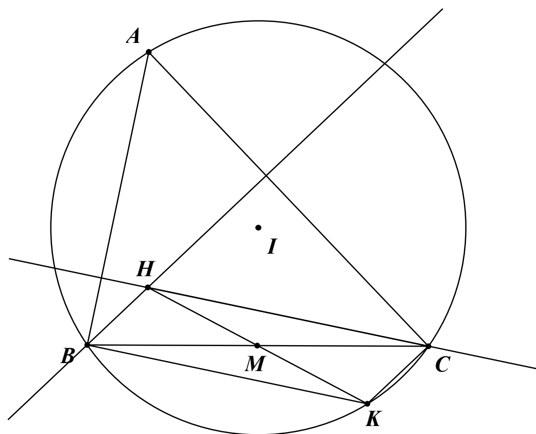
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $C\left(1;-3\right)$

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là $M\left(3;-1\right)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B đi qua điểm $E\left(-1;-3\right)$ và đường thẳng chứa AC đi qua điểm $F\left(1;3\right)$. Điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm $D\left(4;-2\right)$. Tìm tọa độ của các đỉnh tam giác ABC.

(Trích đề thi thử số 1, Website: mathvn.com, năm 2015)

Hướng dẫn giải:





* Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì khi đó BHCD là hình bình hành, nên M là trung điểm HD.

Suy ra $H(2;0)$. BH chứa $E(-1;-3)$ nên $BH: x-y-2=0$

* Do $CD//BH$ và $D(4;-2)$ thuộc CD nên $CD: x-y-6=0$

BH vuông góc AC và $F(1;3)$ thuộc AC nên $AC: x+y-4=0$

* Do C là giao điểm AC và CD nên tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y-6=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow C(5;-1)$

$M(3;-1)$ là trung điểm BC nên $B(1;-1)$

* Do H là trực tâm tam giác ABC nên AH vuông góc BC suy ra $AH: x-2=0$

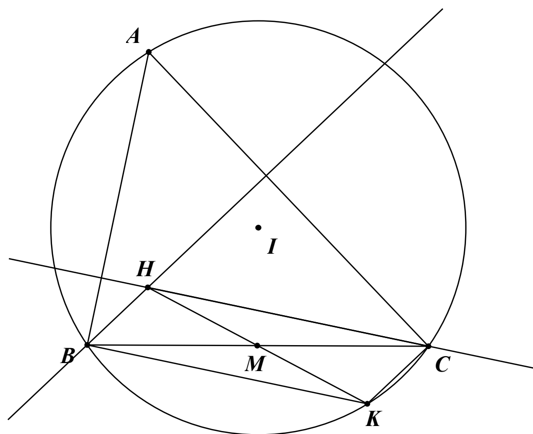
Do A là giao điểm AH và AC nên tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow A(2;2)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $A(2;2), B(1;-1), C(5;-1)$

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình $BC: x-y-4=0$, các tọa độ điểm $H(2;0), I(3;0)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Lập phương trình đường AB biết điểm B có hoành độ không lớn hơn 3.

Hướng dẫn giải:





* Gọi G(a; b) là trọng tâm tam giác ta có: $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI} \Rightarrow \begin{cases} a-2=6-2a \\ b=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{8}{3} \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{8}{3};0\right)$

* Gọi M là trung điểm BC thì MI vuông góc BC nên phương trình đường thẳng MI là

$$MI: x+y-3=0$$

* Mặt khác M là giao điểm MI và BC nên tọa độ M thỏa hệ: $\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};\frac{-1}{2}\right)$

*

Lại có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow A(1;1)$. Do $R = IA = \sqrt{5}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp

Gọi $B(m;m-4)$ thuộc BC (trong đó $m \le 3$).

Ta có: $BI^2 = 5 \Leftrightarrow (m-3)^2 + (m-4)^2 = 5 \Leftrightarrow m = 2$ hay m = 5 (So điều kiện ta nhận m = 2)

Vậy $AB: 3x + y - 4 = 0$

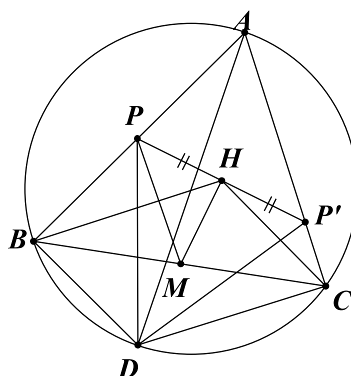
Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $AB: 3x+y-4=0$

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC có $H\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$ là trực tâm, $M\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của BC, $P\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right), Q(6;-1)$ lần lượt là các điểm thuộc AB, AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.



(Trích đề thi thử số 9, Diễn đàn k2pi.net, năm 2015)

Hướng dẫn giải cách 1:



* gọi AD là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Xét AB vuông góc BD và CH vuông góc AB suy ra BD // CH.

Tương tự ta có: BH // CD suy ra BHCD là hình bình hành

Suy ra M là trung điểm HD.

*

Gọi P' là giao điểm PH và AC. Theo đề bài, ta có: $\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HM}=0 \Rightarrow HP \perp HM$

Suy ra các tứ giác DPHD và CDHP nội tiếp được

$\Rightarrow \angle DPH = \angle DBH = \angle DCH = \angle DP'H \Rightarrow \Delta DPP'$ cân tại D.

Suy ra $HP = HP'$. Tọa độ $P(3;10)$

* Phương trình $AC: 3x + y - 17 = 0$

Thấy ngay $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u_{AC}} \Rightarrow PM // AC \Rightarrow P$ là trung điểm AB.

Tọa độ $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Gọi $A(a;17-3a)$ thuộc đường AC suy ra $B(1-a;3a-6)$

* Ta có: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow (1-2a)\left(a-\frac{1}{2}\right)+(6a-23)\left(\frac{13}{2}-3a\right)=0 \Leftrightarrow 2a^2-11a+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3\,(tm) \\ a=\frac{5}{3}\,(ktm)\end{array}\right.$



Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $A(3;8), B(-2;3), C(5;2)$

Hướng dẫn giải cách 2:

* Gọi $B(a;b)$, do M là trung điểm BC suy ra $C(3-a;5-b)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{PB} = \left(a-\frac{1}{2}; b-\frac{11}{2}\right) \\ \overrightarrow{QC} = (-3-a; 6-b) \\ \overrightarrow{HB} = \left(a-\frac{5}{2}; b-\frac{9}{2}\right) \\ \overrightarrow{HC} = \left(\frac{1}{2}-a; \frac{1}{2}-b\right) \end{cases}$

* Ta có H là trực tâm tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{HC} = 0 \\ \overrightarrow{QC}.\overrightarrow{HB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-a\right) + \left(b-\frac{11}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-b\right) = 0 \\ \left(a-\frac{5}{2}\right)(-3-a) + \left(b-\frac{9}{2}\right)(6-b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-a-6b+3=0 \quad (1) \\ a^2+b^2+\frac{a}{2}-\frac{21b}{2} = \frac{-39}{2} (2) \end{cases}$$

* Lấy (1) trừ (2) ta được $-a+3b=11$ suy ra $a=3b-11$ thay vào (1) ta được:

$$10b^2-75b+135=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \Rightarrow a=-2 \\ b=\frac{9}{2} \Rightarrow a=\frac{5}{2} \end{array}\right.$$

* Với $a=-2, b=3 \Rightarrow B(-2;3), C(5;2) \Rightarrow A(3;8)$

* Với $a=\frac{9}{2}, b=\frac{5}{2} \Rightarrow B\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right) \equiv H \ (loai)$

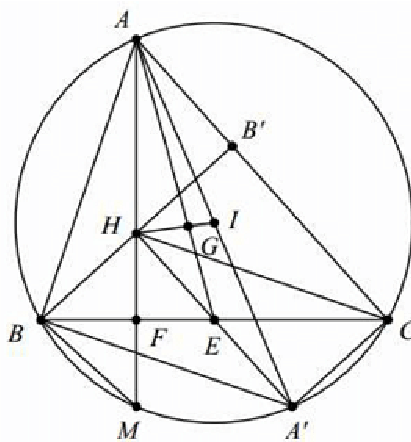
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $A(3;8), B(-2;3), C(5;2)$



Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (c) có phương trình là $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=26, G\left(1;\frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác và $M(7;2)$ nằm trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC, M khác A. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ của điểm B lớn hơn tung độ của điểm C.

(Trích đề thi thử số 3, Tạp chí Toán học và Tuổi Trẻ, năm 2014)

Hướng dẫn giải:



* Gọi I là tâm đường tròn (C), E là trung điểm BC và H là trực tâm tam giác ABC.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn (C).

Ta có: $BA'//CH, CA'//BH$ nên BHCA' là hình bình hành.

Suy ra E là trung điểm A'H do đó IE là đường trung bình của tam giác H'AA.

Nên $\frac{IE}{AH}=\frac{1}{2}=\frac{EG}{GA}$

* Do đó, ta có: $\Delta GIE \sim \Delta GHA \Rightarrow \angle AGH = \angle EGI \Rightarrow G, H, I$ thẳng hàng nên $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$

Mà $I(2;3)$ nên ta có: $\begin{cases} x_H-1=-2(2-1) \\ y_H-\frac{8}{3}=-2\left(3-\frac{8}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H=-1 \\ y_H=2 \end{cases} \Rightarrow H(-1;2)$

* Mặt khác M thuộc (C) và A, H, M thẳng hàng.



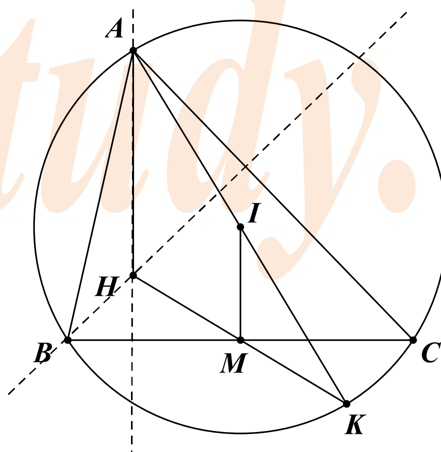
Lại có $\angle BHM = \angle AHB' = \angle ACF = \angle BMH \Rightarrow \Delta MBH$ cân tại B nên BC là đường trung trực của đoạn HM. Ta có $F(3;2)$ và $\overrightarrow{HM} = (8;0) = 8(1;0)$ nên phương trình $BC: x-3=0$

* Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} hay \begin{cases} x=3 \\ y=8 \end{cases}$

Do B có tung độ lớn của C nên ta nhận $B(3;8), C(3;-2)$

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $\sqrt{17}$ và đường thẳng BC có phương trình $3x-5y-30=0$. Biết trực tâm H của tam giác thuộc đường thẳng $d: 5x-3y-24=0$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ với M là trung điểm đoạn BC và tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:



* Kẻ đường kính AA' của đường tròn (I) suy ra IM là đường trung bình của tam giác HAA'

Suy ra $AH = 2IM$ nên $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$

* Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x-5y-2=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases} hay \begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

Suy ra $B(0;-6), C(5;-3)$ hay $C(0;-6), B(5;-3)$



* Trung điểm M của BC có tọa độ $M\left(\frac{5}{2};\frac{-9}{2}\right)$. Trực tâm H của tam giác thuộc đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $T_{2\overrightarrow{IM}=(3;-5)}$

Từ biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến suy ra phương trình đường tròn (C') có tâm $I(4;-7)$ là:

$$(C'):(x-4)^2+(y+7)^2=17$$

* Vậy H là giao điểm của đường tròn (C') và đường thẳng có phương trình $5x-3y-24=0$

Nên tọa độ H thỏa hệ: $\begin{cases}5x-3y-24=0\\(x-4)^2+(y+7)^2=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases} hay \begin{cases}x=0\\y=8\end{cases}$

Suy ra $A(0;2)$, $A(-3;-3)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\left[\begin{array}{l}A(0;2),B(0;-6),C(5;-3)\ hay\ A(-3;-3),B(0;-6),C(5;-3)\\A(0;2),C(0;-6),B(5;-3)\ hay\ A(-3;-3),C(0;-6),B(5;-3)\end{array}\right.$$

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;1),B(1;5),C(4;0)$. Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, G, H.

(Thử sức trước kì thi đề số 4, tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 427, năm 2013)

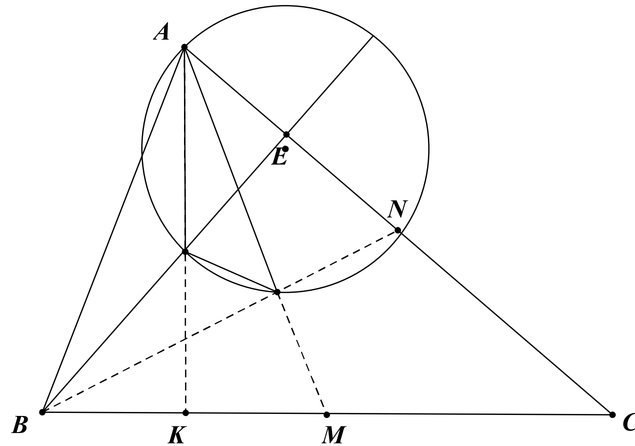
Hướng dẫn giải:

* Ta có G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra tọa độ $G(1;2)$

* Ta có AH qua H qua $A(-2;1)$ và nhận $\overrightarrow{BC}=(3;-5)$ làm vecto pháp tuyến nên có dạng là:

$$3(x+2)-5(y-1)=0\Leftrightarrow AH:3x-5y+11=0$$





Lại có BH qua $B(1;5)$ và nhận $\overrightarrow{AC}=(6;-1)$ làm vecto pháp tuyến nên có dạng là:

$$6(x-1)-1(y-5)=0 \Leftrightarrow BH: 6x-y-1=0$$

Khi đó H là giao điểm AH và BH nên tọa độ H thỏa hệ:

$$\begin{cases} 3x-5y+11=0 \\ 6x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{27} \\ y=\dfrac{23}{9} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{16}{27};\dfrac{23}{9}\right)$$

* Gọi phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Ta có $\begin{cases} A\in(C) \\ G\in(C) \\ H\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+4a-2b+c=0 \\ 5-2a-4b+c=0 \\ \dfrac{5017}{729}-\dfrac{32}{27}a-\dfrac{46}{9}b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-49}{108} \\ b=\dfrac{49}{36} \\ c=\dfrac{-25}{54} \end{cases}$

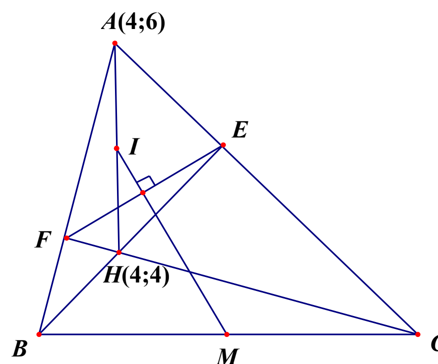
Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;6)$ trực tâm H(4;4), trung điểm M của cạnh BC thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-1=0$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C của tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết đường thẳng EF song song với đường thẳng $d: x-3y+5=0$.



(Đề thi thử Trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội - Lần 1 - 2015 - 2016)

Đáp án: Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH, BC. Dễ thấy các điểm A, H, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH, có tâm là I; còn các điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC, có tâm là M. Vì EF là dây cung chung của hai đường tròn nói trên nên $IM \perp EF$, kéo theo $IM \perp d$. Từ đó, viết được phương trình đường thẳng $IM: 3x + y - 17 = 0$. Do $M = \Delta \cap d$ nên suy ra $M(5;2)$.



Đường thẳng BC vuông góc AH, đi qua M nên $BC: y - 2 = 0$. Từ đó, gọi tọa độ điểm $B(b;2)$ thì tọa độ $C(10-b;2)$. Vì $BH \perp AC$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} = 0$, suy ra $(6-b).(b-4)+(-4).(-2)=0$, từ đó tìm được $b = 2$ hoặc $b = 8$.

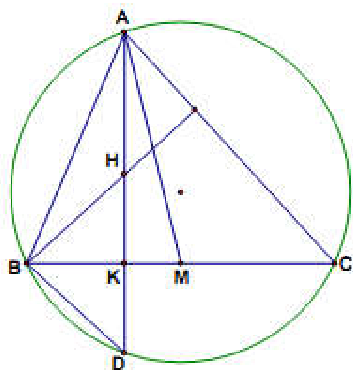
Suy ra $B(2;2), C(8;2)$ hoặc $B(8;2), C(2;2)$

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0, x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC; biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

(Đề thi thử THPT Thống Nhất Thanh Hóa 2016 Lần 1)

Đáp án: Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:





$\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}}=\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của $AD:1(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x+5y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$

Tứ giác HKCE nội tiếp nên $BHK=KCE$, mà $KCE=BDA$ (nội tiếp chắn cung AB)

Suy ra $BHK=BDK$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$

Do B thuộc $BC \Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$

$\overrightarrow{HB}(t-2t;t-8);\overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=7 \end{array}\right.$

Do $t \le 3 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(2;-2),C(5;1)$. Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(1;-3),\overrightarrow{AC}=(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}}=(3;1),\overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$

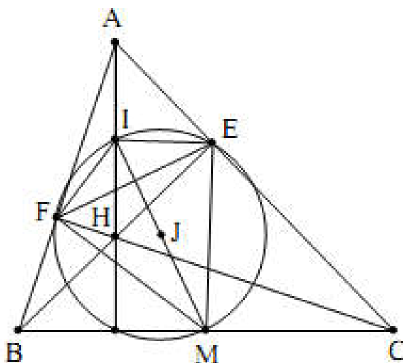
Suy ra $AB:3x+y-4=0; AC:y-1=0$



Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, phương trình đường thẳng AH là $3x-y+3=0$, trung điểm của cạnh BC là M(3 ; 0). Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C đến AC và AB, phương trình đường thẳng EF là $x-3y+7=0$. Tìm tọa độ điểm A, biết A có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Sở GD & DT Quảng Nam 2016)

Đáp án: ***(Đường tròn (J) là đường tròn Euler)***



Gọi I trung điểm AH. Tứ giác AEHF nội tiếp và bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn nên $IM \perp EF$ (đoạn nối tâm vuông góc với dây chung).

Ta có: $\widehat{IEF}=\widehat{ABE}$ (cùng phụ góc A hoặc cùng phụ góc EHF) và $\widehat{ABE}=\frac{1}{2}\widehat{EMF}=\widehat{IME}$

$\Rightarrow \widehat{MEI}=90^0 \Rightarrow \widehat{MFI}=\widehat{MEI}=90^0$

Do đó tứ giác MEIF nội tiếp đường tròn đường kính IM, tâm là trung điểm J của IM.

(Đường tròn (J) là đường tròn Euler)

Đường thẳng IM qua M và vuông góc EF nên có phương trình: $3x+y-9=0$

I là giao điểm của AH và IM nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x-y+3=0\\3x+y-9=0\end{cases}\Rightarrow I(1;6)$$

Đường tròn đường kính IM có tâm $J(2;3)$ và bán kính $r=IM=\sqrt{10}$ nên có phương trình: $(x-2)^2+(y-3)^2=10$.



Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y+7=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-7 \\ (y-3)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow E(5;4) \text{ hoặc } E(-1;2)$$

Vì $A \in AH$ nên $A(a;3a+3)$

Ta có: $IA = IE \Leftrightarrow IA^2 = IE^2 \Leftrightarrow (a-1)^2+(3a-3)^2 = 20 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}$

Vì A có hoành độ dương nên $A\left(1+\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$

Câu 15 **(Thpt – Minh Châu – lần 2)** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh B,C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$. **Đáp số :**B(4;-1)**;** $C(-5;-4)$**.**

Ta thấy tứ giác BMHN nội tiếp, suy ra I là trung điểm của BH;

$B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$

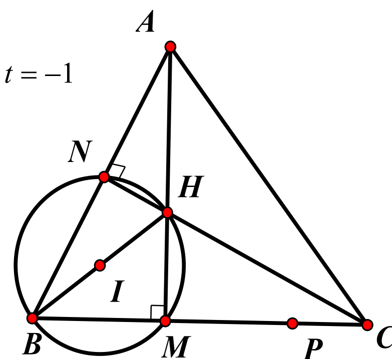
Suy ra $H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP} = (2t-1;-t-2)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2) = 0 \Leftrightarrow 5t^2+10t+5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Suy ra $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH} = (1;-3)$,đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

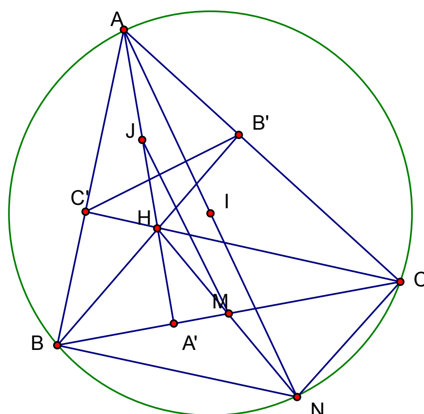
Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Tìm được toạđộ $C(-5;-4)$.



Câu 16 **(Thpt – C Nghĩa Hưng)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độOxy,cho tam giác đường cao AA′có phương trình x+2y-2=0 trực tâm H(2;0) kẻ các đường cao BB′và CC′ đường thẳng B′C′ có phương trình x-y+1=0 M3;-2) là trung điểm BC .tìm tọa độ các đỉnh A,B và C.



Đáp số : $B(3+\sqrt{13};-2+2\sqrt{13})$ $C(3-\sqrt{13};-2-2\sqrt{13})$.



Xét đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABC kẻ đường kính AN

=> M là trung điểm HN = > N(4;-4)

J là trung điểm AH = >$MJ//AN$ và $MJ \perp B'C'$

Phương trình AN là x+y=0 =>tọa dộ A(-2;2)

= > I(1;-1)

BC có Phương trình $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2+2t \end{cases}$

B(3+t;-2+2t)

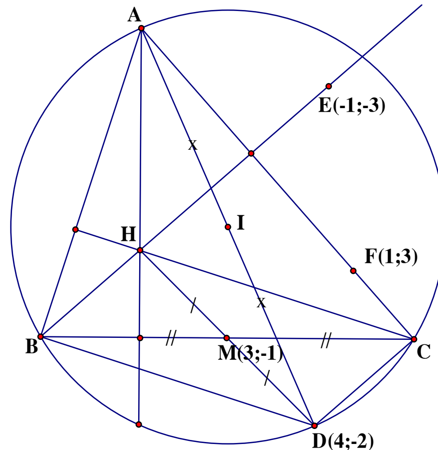
IB=IA

= > $B(3+\sqrt{13};-2+2\sqrt{13})$ $C(3-\sqrt{13};-2-2\sqrt{13})$

Câu 17 **(Thpt – Núi Thành – Quảng Nam)** Trong mặt phẳng (Oxy), cho tam giác ABC có trung điểm của BC là M(3;-1), đường thẳng chứa đường cao vẽ từ B đi qua E(-1;-3) và đường thẳng chứa cạnh AC qua F(1;3). Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC biết D(4;-2) là điểm đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đáp số : A(2;2) ;B(1 ;-1) và C(5 ;-1).





+ Chứng minh được tứ giác BHCD là hình bình hành

+ Tìm được H(2;0).

+ PT đường cao (BH):x-y-2=0.

+ PT cạnh (AC):x+y-4=0.

+Gọi C(c ;4-c) thuộc AC. Nhờ t/c trung điểm suy ra B(6-c ;-6+c).

B nằm trên BH nên ta có (6-c)-(-6+c)-2=0 hay c=5. Suy ra : B(1 ;-1) và C(5 ;-1).

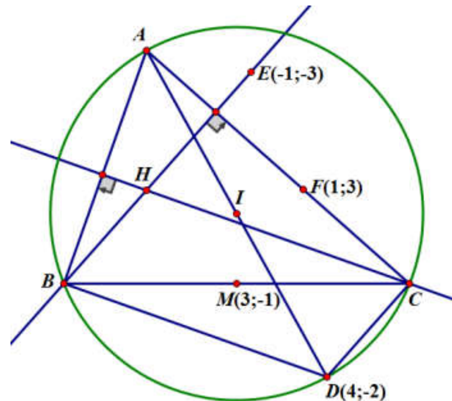
+ PT đường cao (AH) đi qua H(2;0) và vuông góc BC là :x-2=0.

+ A là giao điểm của AH và AC nên A(2;2).

Câu 18. (Thpt – Yên Lạc – Lần 1 - 2015) Cho ΔABC có trung điểm cạnh BC là $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B đi qua điểm $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa AC đi qua điểm $F(1;3)$. Điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là điểm $D(4;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh của ΔABC.

Đáp số : $A(2;2)$; $B(1;-1)$; $C(5;-1)$.





Gọi H là trực tâm ΔABC thì có $BHCD$ là hình bình hành, nên M là trung điểm $HD \Rightarrow H(2;0)$

BH chứa $E(-1;-3)$ nên $(BH): \frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-0}{-3-0} \Leftrightarrow (BH): x-y-2=0$

Do $DC \,//\, BH$ và $D(4;-2)$ thuộc DC nên $(DC): x-y-6=0$

Do $BH \perp AC$ và $F(1;3)$ thuộc AC nên $(AC): x+y-4=0$

Do $C = AC \cap DC$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-6=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$

Tìm được $C(5;-1)$

$M(3;-1)$ là trung điểm của BC nên $B(1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (4;0)$ Do H là trực tâm ΔABC nên $AH \perp BC \Rightarrow (AH): x-2=0$

Do $A = AH \cap AC$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow A(2;2)$

Kết luận: $A(2;2)$; $B(1;-1)$; $C(5;-1)$

.

Bài 19 (Bắc Ninh) trong mặt phẳng tọa độ oxy cho tam giác ABC cân tại A, gọi H là trực tâm tam giác ABC, D là hình chiếu của B lên AC, M là trung điểm cạnh BC, đường thẳng MD đi qua điểm E(-

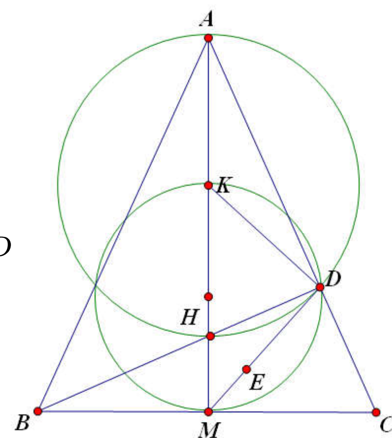


2 ;-1) và phương trình đường tròn đường kính AH là $(x-\frac{13}{4})^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{45}{16}$. tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng điểm A thuộc đường thẳng d : x-y+1=0 ; hoành độ điểm A lớn hơn 3 và tung độ điểm M nhỏ hơn 2,

Bài giải : gọi K là tâm đường tròn đường kính AK,

ta có $\widehat{HDA}=90^0 \Rightarrow D\in(\text{K;KA})$; ta có $\widehat{DBC}=\widehat{MAD}=\frac{1}{2}\widehat{MD}$ (1)

ta lại có $\begin{cases}\Delta AKD \text{ can} \to \widehat{ADK}=\widehat{KAD}\\ \Delta\text{BMD can} \to \widehat{MBD}=\widehat{MDB}\end{cases}$ (2)



từ (1) ;(2) suy ra $\widehat{KDA}=\widehat{BDM}$

$\Rightarrow \widehat{KDM}=\widehat{KDH}+\widehat{HDE}=\widehat{KDH}+\widehat{KDA}=\widehat{HDA}=90^0 \to MD\perp KD$

$\to A(\text{c}-1;\text{c})$; $A\in(K;KA)\to\left[\begin{array}{l}c=5\\ c=\frac{11}{4}\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}A(4;5)\\ A(\frac{7}{4};\frac{11}{4}) \text{ loai}\end{array}\right.$

goi D(a;b) $\to \overrightarrow{KD}=(a-\frac{13}{4};b-\frac{7}{2})$; $\overrightarrow{ED}=(a+2;b+1)$

$$* \begin{cases}D\in(K)\\ KD\perp MD\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-\frac{13}{2}a-7b+20=0\\ a^2+b^2-\frac{5}{4}a-\frac{5}{2}b-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}21a+18b-120=0\\ a^2+b^2-\frac{5}{4}a-\frac{5}{2}b-10=0\end{cases}$$

$$\to\left[\begin{array}{l}b=2\to a=4\\ b=\frac{76}{17}\to a=\frac{32}{17}\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}D(4;2)\\ D(\frac{76}{17};\frac{32}{17})\end{array}\right.$$

Với D(4 ;2) . ta có phương trình AD : x-4=0 ;

Phương trình AH : 2x-y-3=0

Phương trình BC : x+2y-4=0

Phương trình DH : y-2=0

Phương trình MD : x-2y=0



$M = MD \cap AH \Rightarrow M(2;1)$

$B = HD \cap BC \Rightarrow B(0;2)$

$C = AD \cap BC \Rightarrow C(4;0)$

Với trường hợp D còn lại làm tương tự và loại vì điều kiện điểm M,

ĐƯỜNG TRÒN

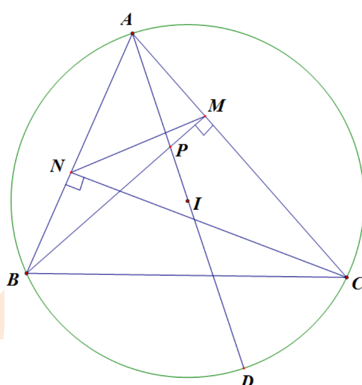
Tam giác - Đường tròn ngoại tiếp





Câu 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh B và C. Tìm tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$ biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

Bài giải



+) Gọi giao điểm của AI với BM và đường tròn (C) lần lượt là P và D

+) Ta có:

$$\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$$

$$\widehat{APM} + \widehat{MAP} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{APM} + \widehat{CBD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{ABC}.$$

$\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow \square MNBC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NCB} \Rightarrow \widehat{APM} + \widehat{NMP} = \widehat{ABC} + \widehat{NCB} = 90^0 \Rightarrow AI \perp MN$$

+) Phương trình đường thẳng $AI: 3x + 4y = 0$

$AI \cap (C) \equiv A \Rightarrow A(-4;3)$ (Thỏa mãn) hoặc $A(4;-3)$ (Loại vì $x_A < 0$)

+) Phương trình đường thẳng $AC: x + 3y - 5 = 0$

$AC \cap (C) \equiv A$ và $C \Rightarrow C(5;0)$

$AC \cap MN \equiv M \to M(-1;2)$



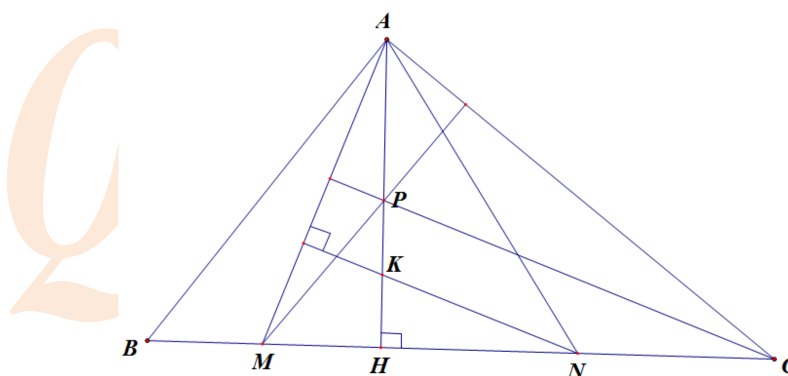
Phương trình đường thẳng $BM \quad 3x-y+5=0$

$BM \cap (C) \equiv B \Rightarrow B(-3;-4)$ (Thỏa mãn) hoặc $B(0;5)$ (Loại vì cùng phía với A so với MN)

- Vậy $A(-4;3); B(-4;-3); C(5;0)$.

Câu 2 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, các điểm $M(2;-1), N$ lần lượt là trung điểm của HB và HC; điểm $K\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trực tâm của ΔAMN. Tìm tọa độ điểm C, biết rằng $y_A<0$ và $A \in d: x+2y+4=0$.

Bài giải



+) Gọi P là trung điểm $AH \Rightarrow MP$ là đường trung bình của $\Delta ABH \Rightarrow MP // AB \Rightarrow MP \perp AC$

Lại có $AH \perp BC \Rightarrow P$ là trực tâm $\Delta ACM \Rightarrow CP \perp AM$

Mà $NK \perp AM \Rightarrow KN$ là đường trung bình của $\Delta HPC \Rightarrow HK = KP \Rightarrow \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KH}$

$A \in d: x+2y+4=0 \Rightarrow A(-4-2a;a)$ với $a<0$ vì $y_A<0$.

$\Rightarrow H\left(\frac{2+2a}{3};\frac{2-a}{3}\right)$

$\begin{cases} \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{KH}=0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a=-1 \Rightarrow H(0;1) \Rightarrow A(-2;-1)$

+) Phương trình đường thẳng $BC: x+y-1=0$



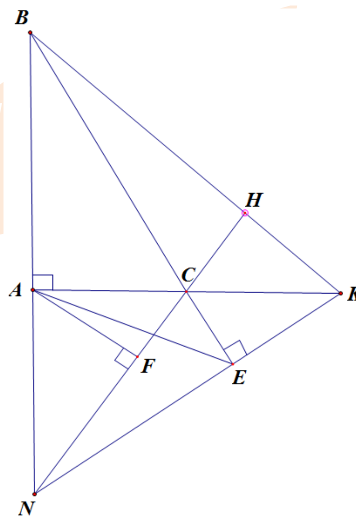
$P(-1;0) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AC: 3x - y + 5 = 0$

$AC \cap BC \equiv C \Rightarrow C(-1;2)$

- Vậy $C(-1;2)$

Câu 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi K là điểm đối xứng của A qua C. Đường thẳng đi qua K vuông góc với BC cắt BC tại E và cắt AB tại $N(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$ biết $\widehat{AEB} = 45^0; BK: 3x + y - 15 = 0; x_B < 3$.

Bài giải



Gọi $CN \cap BK \equiv H$

Ta có $\widehat{BAK} = \widehat{BEK} \Rightarrow \square ABKE$ nội tiếp đường tròn đường kính $BK \Rightarrow \widehat{EBK} = \widehat{EAK} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EK}$

$\square ACEN$ nội tiếp $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{CAE} = \widehat{CNE} \\ \widehat{ANC} = \widehat{AEC} = 45^0 \end{cases}$

$\widehat{EBK} = \widehat{EAK} = \widehat{CNE} \Rightarrow \square BHEN$ nội tiếp ($\widehat{EBK} = \widehat{CNE}$ cùng chắn cung $\overset{\frown}{HE}$)



$\Rightarrow \widehat{BHN} = \widehat{BEN} = 90^0 \Rightarrow \Delta BHN$ vuông tại H. Lại có $\widehat{BNH} = 45^0 \Rightarrow \Delta BNH$ vuông cân tại H.

Phương trình đường thẳng $NC: x - 3y + 10 = 0$

$BH = NH \Rightarrow B(2;9)$ (Loại vì $x_B > 3$) hoặc $B(5;0)$ (Thỏa mãn).

$\begin{cases} \widehat{ANC} = 45^0 \\ \widehat{NAC} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta NAC$ vuông cân.

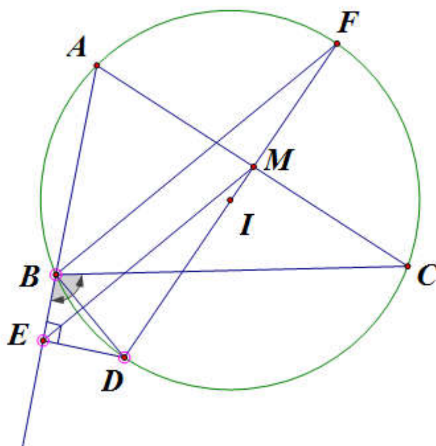
Hạ $AF \perp NC \Rightarrow NF = FC;$ mà $AF // HK \Rightarrow \dfrac{AC}{CK} = \dfrac{CF}{CH} = 1 \Rightarrow NF = FC = CH$

$\Rightarrow \overrightarrow{NH} = 3\overrightarrow{CH} \Rightarrow C(2;4) \Rightarrow A(1;2)$

- Vậy $A(1;2), B(5;0), C(2;4)$.

Câu 4 : Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC không cân có phương trình cạnh $AC: y - 8 = 0.$ Đường phân giác ngoài góc B cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại điểm $D,$ gọi $E\left(\dfrac{1}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$ là hình chiếu của D lên $AB.$ Xác định tọa độ đỉnh A, C biết phương trình BD là: $x + 3y - 3 = 0.$

Bài giải



Đường phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại điểm F

$BF \perp BD \Rightarrow I \in DF \Rightarrow DF \cap AC = M$



$\Rightarrow M$ là trung điểm AC và $DF \perp AC$

$\Rightarrow$ Ta có: $\widehat{DEA} = \widehat{DMA} = 90^0$

$\Rightarrow$□$AMDE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{EMD}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{ED}$)

mà $\widehat{BAD} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{EMD}$

$\Rightarrow BF // EM \quad \Rightarrow EM \perp BD$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $EM: 3x - y - 1 = 0.$

$EM \cap AC \equiv M \Rightarrow M(3;8) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $DM: x - 3 = 0.$

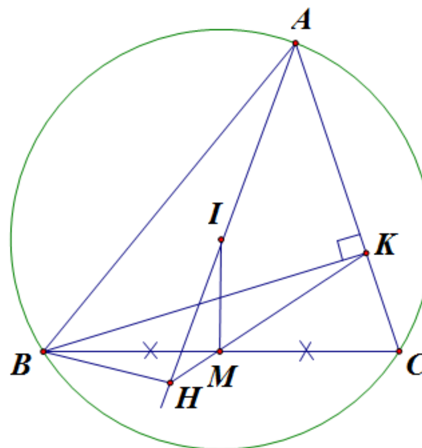
$BD \cap DM \equiv D \Rightarrow D(3;0) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AB: 7x + y - 1 = 0.$

$AB \cap AC \equiv A \Rightarrow A(-1;8) \Rightarrow C(7;8)$

- Vậy $A(-1;8), C(7;8).$

Câu 5 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\Delta ABC.$ Gọi M là trung điể BC và K là hình chiếu vuông góc của B lên $AC.$ Giả sử $M(0;-2), K(2;2),$ đường thẳng đi qua điểm A và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC có phương trình $\Delta: x + 1 = 0.$ Tìm tọa độ các điểm B, C biết điểm B có hoành độ âm.

Bài giải:





Ta có: M là trung điểm $BC \Rightarrow IM \perp BC$

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BIM}$

$\Rightarrow \Delta AKB \backsim \Delta IMB \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{IBM}$

$\Leftrightarrow \widehat{ABI} + \widehat{IBK} = \widehat{IBK} + \widehat{KBM}$

$\Leftrightarrow \widehat{ABI} = \widehat{KBM} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{KBM}$

Mà $BM = MK \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{BKM}$

Gọi $AI \cap MK \equiv H$

Vì $\widehat{BAI} = \widehat{BKM}$ (Góc chắn cung)

$\Rightarrow \square ABHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHA} = \widehat{BKA} = 90^0 \Rightarrow BH \perp AI$

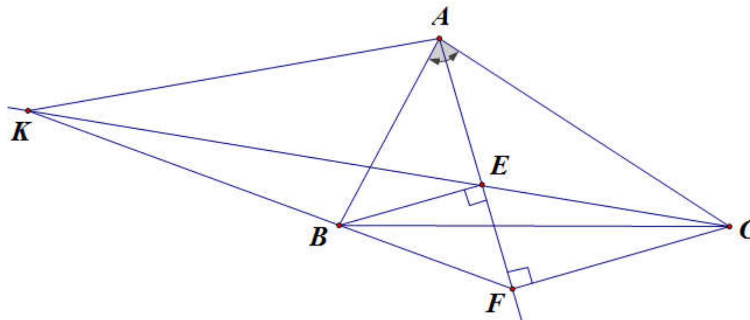
Phương trình đường thẳng $KM : 2x - y - 2 = 0$

$KM \cap AI \equiv H \Rightarrow H(-1;-4) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BH : y + 4 = 0.$

$BM = MK$

Câu 6 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh B, C lên đường phân giác trong góc $A,$ điểm K là giao điểm của các đường thẳng FB và CE. Tìm tọa độ của ΔABC biết $E(2;-1), K\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ và đỉnh A có hoành độ nguyên nằm trên đường thẳng : $2x + y + 3 = 0.$

Bài giải:



Ta có: AE là phân giác góc $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{FAC}$

$BE \perp AE; CF \perp AF \Rightarrow BE // CF$

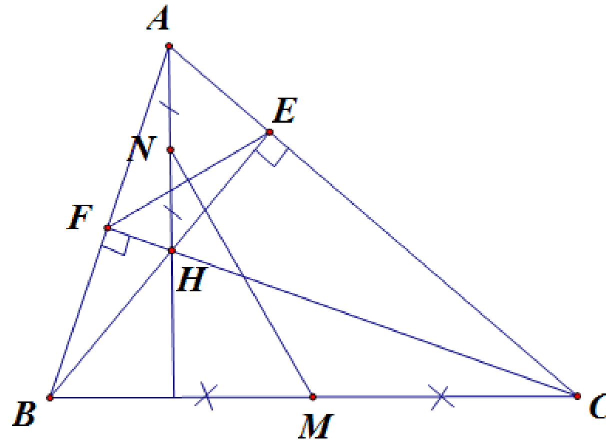
Mà $\Delta ABE \backsim \Delta ACF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF}$

Vì $BE // CF \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{KB}{KF} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{KB}{KF} \Rightarrow \Delta FEB \backsim \Delta FAK \Rightarrow \widehat{FAK} = 90^0 \Rightarrow FA \perp AK$

Vì $KA \perp AE \Rightarrow A(-1;-1)$ (Chọn) hoặc $A\left(-\frac{3}{5};-\frac{9}{5}\right)$ (Loại vì $x_A \in Z$)

Câu 8 (Chuyên KHTN Hà Nội – Quan hệ vuông góc): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(4;6)$, trực tâm $H(4;4)$, trung điểm M của cạnh BC thuộc đường thẳng $x+2y-2=0$. Gọi E,F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B và C của ΔABC. Tìm tọa độ B và C biết rằng EF song song với đường thẳng $d: x-3y+5=0$.





Gọi N là trung điểm $AH \Rightarrow N(4;5)$

$\Rightarrow$□$AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm N

□$BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M

$\Rightarrow MN \perp EF$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $MN: 3x+y-17=0$

$\Rightarrow M\left(\frac{33}{5};\frac{-14}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng $BC: y+\frac{14}{5}=0$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{NA}=\overrightarrow{MO} \Rightarrow O\left(\frac{33}{5};\frac{-9}{5}\right)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $(C):\left(x-\frac{33}{5}\right)^2+\left(y+\frac{9}{5}\right)^2=\frac{338}{5}$

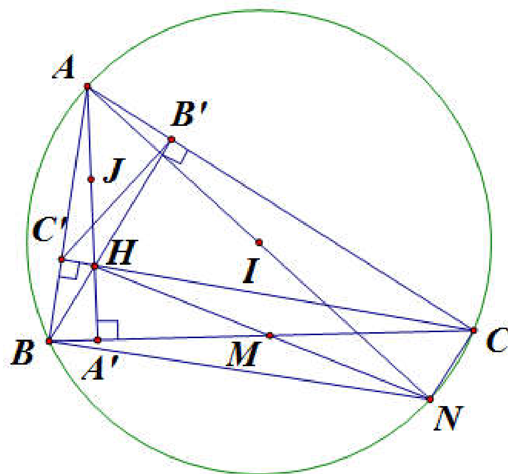


$BC \cap (C) \equiv B$ và C $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} B\left(\frac{33+3\sqrt{185}}{5};\frac{-14}{5}\right) \\ C\left(\frac{33-3\sqrt{185}}{5};\frac{-14}{5}\right) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} B\left(\frac{33-3\sqrt{185}}{5};\frac{-14}{5}\right) \\ C\left(\frac{33+3\sqrt{185}}{5};\frac{-14}{5}\right) \end{array} \right. \end{array} \right.$

Câu 8 (THPT – C Nghĩa Hưng) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC đường cao AA' có phương trình $x+2y-2=0$, trực tâm $H(2;0)$. Kẻ các đường cao BB' và CC'; đường thẳng $B'C'$ có phương trình $x-y+1=0$; $M(3;-2)$ là trung điểm BC. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

Đáp số : $B(3+\sqrt{13};-2+2\sqrt{13}), C(3-\sqrt{13};-2-2\sqrt{13})$.

Bài giải:



Xét đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ đường kính AN.

M là trung điểm $HN \Rightarrow N(4;4)$

J là trung điểm $AH \Rightarrow MJ // AN$ và $MJ \perp B'C'$



$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AN: x+y=0 \Rightarrow A(-2;2) \Rightarrow I(1;-1)$

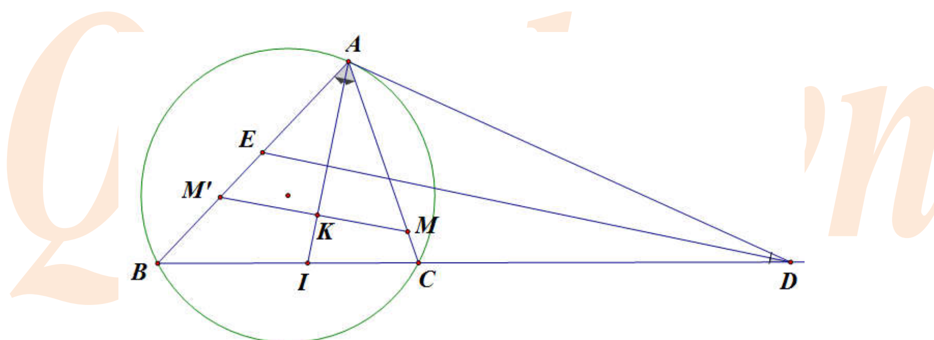
Phương trình đường thẳng BC $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+2t \end{cases} \Rightarrow B(3+t;-2+2t)$

$IB = IA \Rightarrow B\left(3+\sqrt{13};-2+2\sqrt{13}\right) \Rightarrow C\left(3-\sqrt{13};-2-2\sqrt{13}\right)$

Câu 9 (Thpt – Yên Phong 2 – Bắc Ninh) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC có $A(1;4)$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x-y+2=0$ cắt AB tại E, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Đáp số : $AB: 5x-3y+7=0$.

Bài giải:



Gọi AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$

Ta có: $\widehat{AID} = \widehat{ABC} + \widehat{BAI}; \widehat{IAD} = \widehat{CAD} + \widehat{CAI}$

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}, \widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{AID} = \widehat{IAD} \Rightarrow \Delta DAI$ cân tại $D \Rightarrow DE \perp AI$

Phương trình đường thẳng AI là : $x+y-5=0$

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $AI \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $MM': x-y+5=0$

Gọi $AI \cap MM' \equiv K \Rightarrow K(0;5) \Rightarrow M'(4;9)$

$\overrightarrow{AM'} = (3;5)$ là VTCP của đường thẳng $AB \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (5;-3)$ là VTPT của đường thẳng AB

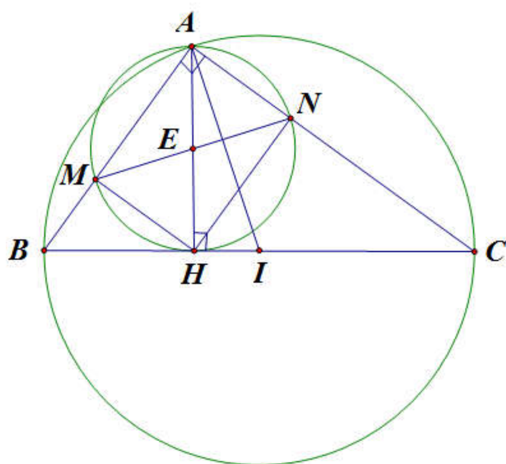
$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AB: 5x-3y+7=0.$



Câu 10 (THPT – Lý Thái Tổ - Bắc Ninh – Lần 1 – 2016) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $x^2+y^2-6x-2y+5=0.$ Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC, biết đường thẳng MN có phương trình : $20x-10y-9=0$ và điểm H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

Đáp số : $A(1;2); BC: 2x+y-7=0$

Bài giải:



(T) có tâm $I(3;1)$ và bán kín $R=\sqrt{5}$

Do $IA=IC \Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{ICA}$ $\quad(1)$

Đường tròn đường kính AH cắt BC tại $M \Rightarrow MH \perp AB \Rightarrow MH // AC$ (Cùng vuông góc với AB)$\Rightarrow \widehat{MHB}=\widehat{ICA}$ $\quad(2)$

Ta có $\widehat{ANM}=\widehat{AHM}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$ $\quad(3)$

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow AI \perp MN \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AI: x+2y-5=0.$



$A \in AI \Rightarrow A(5-2a;a)$. Mà $A \in (T) \Rightarrow (5-2a)^2 + a^2 - 6(5-2a) - 2a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$

Với $a = 2 \Rightarrow A(1;2)$ (Thỏa mãn vì A, I khác phía MN)

Với $a = 0 \Rightarrow A(5;0)$ (Loại vì A, I cùng phía MN)

Gọi E là tâm đường tròn đường kính $AH \Rightarrow E \in MN \Rightarrow E\left(t; 2t - \frac{9}{10}\right)$

Do E là trung điểm

$AH \Rightarrow H\left(2t-1; 4t-\frac{38}{10}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(2t-2; 4t-\frac{58}{10}\right), \overrightarrow{IH} = \left(2t-4; 4t-\frac{48}{10}\right)$

Vì $AH \perp HI \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{IH} = 0 \Rightarrow 20t^2 - \frac{272}{5}t + \frac{896}{25} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{8}{5} \\ t = \frac{28}{25} \end{array}\right.$

Với $t = \frac{8}{5} \Rightarrow H\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right)$ (Thỏa mãn)

Với $t = \frac{28}{25} \Rightarrow H\left(\frac{31}{25}; \frac{17}{25}\right)$ (Loại vì $x_H < y_H$)

Ta có: $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow BC$ nhận $\vec{n} = (2;1)$ là VTCP

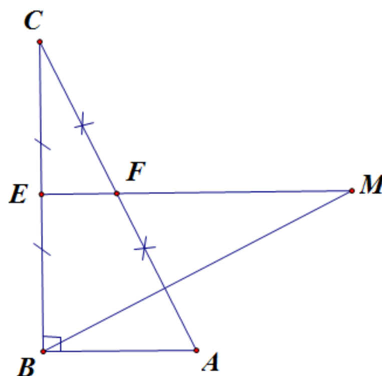
$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BC: 2x + y - 7 = 0.$

Câu 11 (THPT – Trần Phú – Hà Tĩnh – Lần 1 – 2016) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại $B, BC = 2BA$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, AC. Trên tia đối của tia FE lấy điểm M sao cho $FM = 3FE$. Biết điểm $M(5;-1)$, đường thẳng AC có phương trình $2x + y - 3 = 0$, điểm A có hoành độ là một số nguyên. Xác định toạ độ các đỉnh của ΔABC.

Đáp số : $A(3;-3), B(1;-3), C(1;1)$.

Bài giải:





Gọi $BM \cap AC \equiv I$

Ta thấy $BC = 2BA \Rightarrow EB = BA, FM = 3FE \Rightarrow EM = BC$

$\Delta ABC = \Delta BEM \Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{CAB} \Rightarrow BM \perp AC$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BM : x - 2y - 7 = 0$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{5} \\ y = -\dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{13}{5}; -\frac{11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{IB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{IM} = \left(-\dfrac{8}{5}; -\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow B(1;-3)$

Trong ΔABC ta có $\dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{5}{4BA^2} \Rightarrow BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2}BI$

Mặt khác $BI = \sqrt{\left(-\dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2}BI = 2$

Gọi $A(a;3-2a)$, ta có $BA^2 = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (6-2a)^2 = 4 \Leftrightarrow 5a^2 - 26a + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

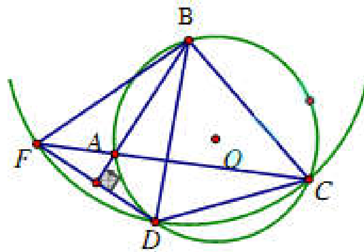
Do $x_A \in Z \Rightarrow A(3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \left(-\dfrac{2}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} = (-2;4) \Rightarrow C(1;1)$.

- Vậy $A(3;-3), B(1;-3), C(1;1)$.

Câu 12 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(T): x^2+y^2=9$, $AB<BC$, đường tròn tâm B bán kính BC cắt đường tròn (T) tại D khác C, cắt đường thẳng AC tại F, biết rằng đường thẳng DF có phương trình: $x+y+4=0$ và $M(-2;1)$ thuộc đường thẳng AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết rằng B có tung độ dương.

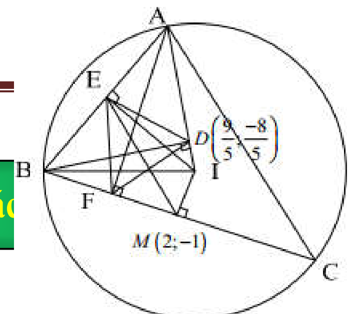
Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O nên $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$. Trong đường tròn tâm bán kính BC ta có $\widehat{FBD}=2\widehat{FCD}$. Suy ra $\widehat{FBD}=2\widehat{ABD}$, do đó AB là đường phân giác trong của cóc $\widehat{ABD}$ của tam giác cân FBD nên AB cũng là đường cao, hay $AB\perp FD$



Đường thẳng AB qua $M(-2;1)$ và buông góc với DF nên có PT: $1(x+2)-1(y-1)=0$
$\Leftrightarrow x-y+3=0$
Tọa độ các điểm A,B là nghiệm của hệ:
$\begin{cases} x-y=-3 \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$
B có tung độ dương nên: $B(0;3), A(-3;0)$

Câu 13 (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm *I*, điểm $M(2;-1)$ là trung điểm của *BC,* hình chiếu vuông góc của *B* lên *AI* là $D\left(\frac{9}{5};\frac{-8}{5}\right)$. Biết rằng *AC* có phương trình $x+y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên BC, E là trung điểm của AB. Ta có tứ giác BFDA nội tiếp đường tròn đường kính AB và ngũ giác BEDIM nội tiếp đường tròn





đường kính BI suy ra $\angle DEM = \angle DBM = \angle DBF = \frac{1}{2}\angle DEF$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung) nên EM là phân giác của góc $\angle DEF$, lại có $FE = DE = \frac{1}{2}AB$ nên ME là đường trung trực của DF.

Đường thẳng ME qua M và song song với AC nên có phương trình

$x + y - 1 = 0$, F đối xứng với D qua ME nên $F\left(\frac{13}{5};\frac{-6}{5}\right), \overrightarrow{MF} = \left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$ nên véc tơ pháp tuyến của BC là $\vec{n}(1;-3)$ suy ra phương trình BC là $x - 3y - 5 = 0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow C(5;0)$

M là trung điểm BC suy ra $B(-1;-2)$

AF qua F và vuông góc với BC nên có

phương trình $3x + y - \frac{33}{5} = 0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x + y - \frac{33}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;4)$

<u>Bài 14</u>.(*THPT XUÂN TRƯỜNG NAM ĐỊNH*) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD.Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD.Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x - 4y - 17 = 0$; đường thẳng BC đi qua điểm E(7;0) và điểm M có tung độ âm.

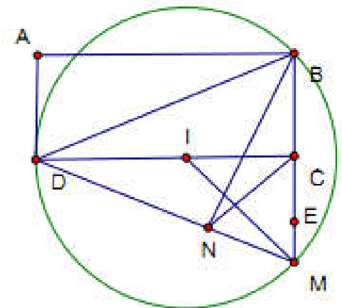
+(T) có tâm I(4;1);R=5



+ Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và N,C là chân các đường cao nên chứng minh được: $IM \perp CN$

+ Lập ptđt IM qua I và $IM \perp CN: 4(x-4)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-19=0$

+ M là giao điểm (T) với IM: $\left[\begin{array}{l} M(7;-3) \\ M(1;5) \quad (loai) \end{array}\right.$



+Đường thẳng BC qua M,E có pt : $x=7$

+ C là giao điểm BC và NC $\Rightarrow C(7;1)$

+ B đối xứng M qua C $\Rightarrow B(7;5)$

+ Đường thẳng DC qua C và vuông góc BC : y=1

D là giao điểm (T) và $DC:\left[\begin{array}{l} D(9;1) \\ D(-1;1) \end{array}\right.$

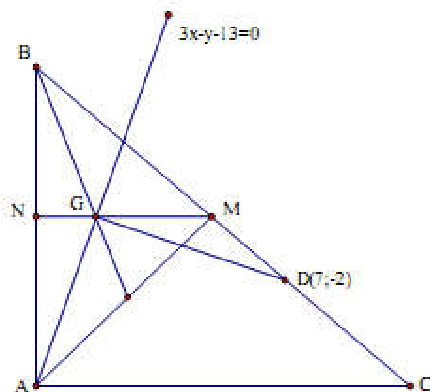
Vì B,D nằm cùng phía với CN nên $D(-1;1)$

+ Do $\overline{BA}=\overline{CD} \Rightarrow A(-1;5)$

Bài 15 : Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm ΔABM , điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA=GD$. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB, biết hoành độ của A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x-y-13=0$

HỮU LỘC THANH HÓA





Ta có $d\left(D;AG\right)=\dfrac{\left|3.7-\left(-2\right)-13\right|}{\sqrt{3^2+\left(-1\right)^2}}=\sqrt{10}$

ΔABM vuông cân $\Rightarrow GA=GB\Rightarrow GA=GB=GD$

Vậy G là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABD\Rightarrow \widehat{AGD}=2\widehat{ABD}=90^0\Rightarrow \Delta GAD$ vuông cân tại G.

Do đó $GA=GD=d\left(D;AG\right)=\sqrt{10}\Rightarrow AD^2=20$

Gọi $A\left(a;3a-13\right);a<4$

$AD^2=20\Leftrightarrow \left(a-7\right)^2+\left(3a-11\right)^2=20\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5\left(loai\right)\\ a=3\end{array}\right.$

Vậy $A\left(3;-4\right)$

Gọi VTPT của AB là $\overline{n}_{AB}\left(a;b\right)$

$\cos\widehat{NAG}=\left|\cos\left(\overline{n}_{AB},\overline{n}_{AG}\right)\right|=\dfrac{\left|3a-b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}\quad(1)$

Mặt khác $\cos\widehat{NAG}=\dfrac{NA}{AG}=\dfrac{NM}{\sqrt{NA^2+NG^2}}=\dfrac{3NG}{\sqrt{9.NG^2+NG^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\quad(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{\left|3a-b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow 6ab+8b^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0\\ 3a=-4b\end{array}\right.$

Với b=0 chọn a = 1 ta có: $AB:x-3=0$

Với $3a=-4b$ chọn $a=4,b=-3$ ta có $AB:4x-3y-24=0$

Nhận thấy với $AB:4x-3y-24=0$



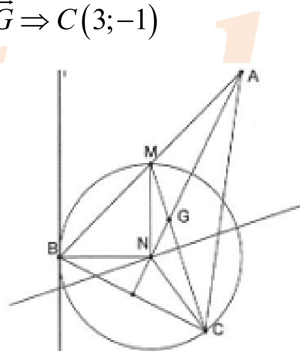
$d\left(D;AB\right)=\frac{\left|4.7-3.\left(-2\right)-24\right|}{\sqrt{16+9}}=2<d\left(D;AG\right)=\sqrt{10}$ (loại)

Vậy $AB:x-3=0$

Câu 16 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm G(2;2). Trung điểm của cạnh AB là $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM cắt đường thẳng AG tại điểm thứ hai là N. Biết đường thẳng vuông góc với BN tại B có phương trình x = -1 và điểm N có hoành độ nhỏ hơn 4. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

TRƯỜNG HÀN THUYÊN BẮC NINH

Trong tam giác ABC ta có $\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow C\left(3;-1\right)$



Ta có tam giác ABC cân tại A nên đường trung tuyến AG cũng chính là đường phân giác góc A mà N là giao điểm thứ 2 của AG với đường tròn ngoại tiếp AMC nên NM = NC. Ngoài ra AG cũng là đường trung trực của đoạn BC nên NB = NC. Do đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC, đường tròn này tiếp xúc đường thẳng vuông góc với BN tại B là $\Delta:x=-1$

NM= NC nên N thuộc đường trung trực của MC có phương trình $x-3y+\frac{3}{2}=0$

Suy ra $N\left(3t-\frac{3}{2};t\right)$. Ta có $d\left(N,\Delta\right)=NC$ với $\Delta:x=-1$



$$\Rightarrow \left|3t-\frac{1}{2}\right| = \sqrt{10t^2-25t+\frac{85}{4}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=21 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} N\left(\frac{3}{2};1\right) \\ N\left(\frac{123}{2};21\right) \end{array}\right. \Rightarrow N\left(\frac{3}{2};1\right) \text{ (do } x_N<4\text{)}$$

B là hình chiếu của N trên $\Delta: x=-1$ nên $B(-1;1)$,M là trung điểm AB nên $A(4;6)$

Câu 17 .Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;2)$, điểm D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại điểm thứ hai là M (khác A). Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết điểm $J(-2;2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD và phương trình đường thẳng CM là: $x+y-2=0$

THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG

Ta có: $\widehat{MBC}=\widehat{MAC}$ (cùng chắn MC)

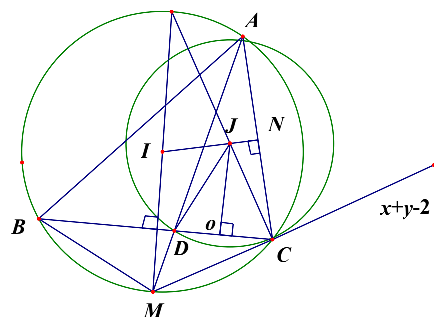
$\widehat{MAC}=\widehat{KJC}$ ($K=JK\perp BC$)

$\Rightarrow \widehat{KJC}=\widehat{MBC}$ (1)

Mà $\widehat{MBC}=\widehat{MAC}=\widehat{BAM}$ (2)

Lại có: $\widehat{BAM}=\widehat{BCM}$ (3) (cùng chắn BM)

$\widehat{KJC}+\widehat{KCJ}=90^0$ (4)



$(1)+(2)+(3)+(4)\Rightarrow JC\perp CM$

$\Rightarrow JC: x-y+4=0 \Rightarrow C(-1;3)$

$IC=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{JI}(4;0) \Rightarrow CA: 4(x+1)+0(y-3)=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $IJ: y=2$

$N = IJ\cap AC \Rightarrow N(-1;2) \Rightarrow A(-1;1)$



$(C):(x-2)^2+(y-2)^2=10$

$M=CM\perp(C)\Rightarrow M(3;-1)$

$IM\perp BC$ (do cùng cách đều BC) $\Rightarrow BC: x-3y+10=0$

$B=BC\cap(C)\Rightarrow B\left(\frac{12}{5};\frac{23}{5}\right)$

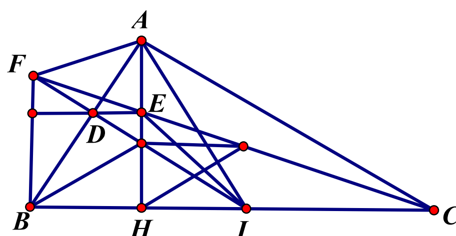
Câu 18 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là trung điểm AB và AH. Đường trung trực của cạnh AB cắt CE tại điểm $F(-1;3)$. Biết rằng điểm D có hoành độ là số nguyên và thuộc đường thẳng $3x+5y=0$. Đường thẳng BC có phương trình $x-2y+1=0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

THPT KIM SƠN

*) Gọi $FD\cap(BC)=\{I\}$

*) $\begin{cases}DI//(AC)(DI\perp AB, AC\perp AB)\\ DA=DB\end{cases}\Rightarrow$ I là trung điểm của BC.

*) $ED//BC$ (ED là đường trung bình ΔABH)



$\Rightarrow\frac{EF}{EC}=\frac{ED}{IC}=\frac{2ED}{2IC}=\frac{BH}{BC}$

$\Rightarrow EH//FB\Rightarrow FB\perp BC$

*) Phương trình BF là: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}\Leftrightarrow 2x+y-1=0$

$\Rightarrow B\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$

*) $D\in 3x+5y=0\Rightarrow D(5d;-3d)\Rightarrow\overrightarrow{FD}(5d+1;-3d-3)$ và $\overrightarrow{BD}\left(5d-\frac{1}{5};-3d-\frac{3}{5}\right)$



*) $BD \perp FD \Rightarrow \overrightarrow{FD}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow (5d+1)\left(5d-\frac{1}{5}\right)+(3d-3)\left(3d-\frac{3}{5}\right)=0$

$\Leftrightarrow 34d^2+\frac{74}{5}d+\frac{3}{5}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-\frac{1}{5}\Rightarrow D\left(-1;\frac{3}{5}\right)(nhan) \\ d=-\frac{4}{17}\Rightarrow D\left(-\frac{20}{17};\frac{12}{17}\right)(loai)\end{array}\right.$

$\Rightarrow D\left(-1;\frac{3}{5}\right)$

*) D là trung điểm $AB \Rightarrow A\left(-\frac{11}{5};\frac{3}{5}\right)$

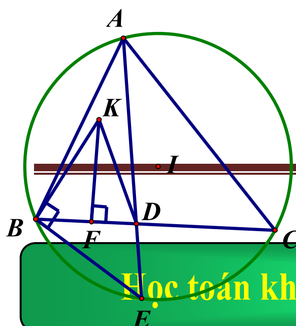
*) $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{12}{5};0\right)=\frac{12}{5}(1;0)$

$\Rightarrow$ Phương trình AC: $x+\frac{11}{5}=0$

$\Rightarrow$ Tọa độ C thỏa mãn: $\begin{cases} x=-\frac{11}{5} \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{11}{5};-\frac{3}{5}\right)$

Câu 19 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt BC tại D và cắt đường tròn (I) tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC. Cho biết $K(1;1); E(0;4)$; phương trình đường thẳng AB là $x-y+3=0$ và điểm B có hoành độ dương.

ĐỀ THI THỬ THPT CỦA 1 TRƯỜNG NÀO ĐÓ





Gọi F là trung điểm BD nên có $KF \perp BD$ (Do K là tâm đường tròn ngoại tiếp ABD) và

$\angle BKD = 2\angle BAD$ (Góc nhọn nội tiếp có số đo bằng $1/2$ số đo góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \angle BKF = \angle BAD$. Lại có: $\angle EBC = \angle EAC = \angle BAD$

Từ các điều trên suy ra $\angle EBC = \angle BKF$ nên

$\angle KBE = \angle KBF + \angle DBE = \angle KBF + \angle BKF = 90^0$

Từ đó: $BK \perp BE$

Do phương trình đường thẳng AB là $x - y + 3 = 0$ nên gọi $B(b;b+3)$ với $b > 0$

Áp dụng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BE} = 0$ ta có $(b-1)+(b+2)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right.$

Chọn được $b = 1$ suy ra $B(1;4)$

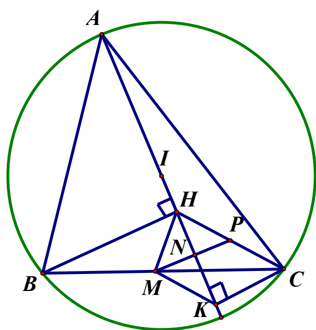
Gọi $A(a;a+3)$ với $a \neq 1$ (từ pt đtAB)

Áp dụng $KA = KB$ có

$(a-1)^2 + (a+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right. \Rightarrow A(-2;1)$

Vậy tọa độ điểm cần tìm $A(-2;1)$

Câu 20 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy), cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(1;3)$. Biết $H(2;1)$, $K(4;-3)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên đường thẳng AI và trung điểm M của BC nằm trên đường thẳng $2x + y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.





Gọi P là trung điểm của HC và N là giao điểm của MP với HK. Khi đó MP là đường trung bình của $\Delta BCH \Rightarrow MP//BH$ mà $BH \perp AI \Rightarrow MP \perp HK$

Suy ra NP là đường trung bình của $\Delta KCH \Rightarrow MP$ là trung trực của HK.

Phương trình đường thẳng MP là $x-2y-5=0$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow M(1;-2)$

Đường thẳng BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $y=-2$

Phương trình đường thẳng $BH: x-2y=0$. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=2 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow B(-4;-2)$$

Do M là trung điểm BC nên $C(6;-2)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC: (x-1)^2+(y-3)^2=50$

Phương trình đường thẳng $AI: 2x+y-5=0$

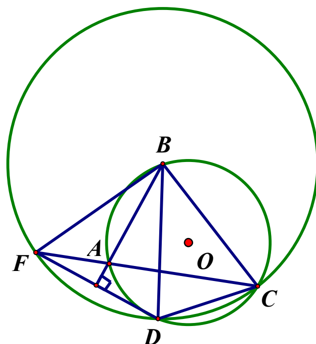
Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ (x-1)^2+(y-3)^2=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-2x \\ (x-1)^2+(2-2x)^2=50 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{10}, y=3-2\sqrt{10} \\ x=1-\sqrt{10}, y=3+2\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Vì ΔABC nhọn nên $A\left(1-\sqrt{10};3+2\sqrt{10}\right)$

Câu 21 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(T): x^2+y^2=9,\ AB<BC$, đường tròn tâm B bán kính BC cắt đường tròn (T) tại D khác C, cắt đường thẳng AC tại F, biết rằng đường thẳng DF có phương trình: $x+y+4=0$ và $M(-2;1)$ thuộc đường thẳng AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết rằng B có tung độ dương.





Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O nên $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Trong đường tròn tâm bán kính BC ta có $\widehat{FBD} = 2\widehat{FCD}$. Suy ra $\widehat{FBD} = 2\widehat{ABD}$, do đó AB là đường phân giác trong của cóc $\widehat{ABD}$ của tam giác cân FBD nên AB cũng là đường cao, hay: $AB \perp FD$

Đường thẳng AB qua $M(-2;1)$ và buông góc với DF nên có PT: $1(x+2)-1(y-1)=0$

$\Leftrightarrow x-y+3=0$

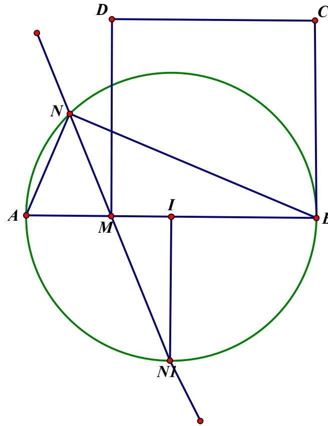
Tọa độ các điểm A,B là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-y=-3 \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

B có tung độ dương nên: $B(0;3), A(-3;0)$

Câu 22 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại B và C có AB > CD và CD = BC. Đường tròn đường kính AB có phương trình $x^2+y^2-4x-5=0$ cắt cạnh AD của hình thang tại điểm thứ hai N. Gọi M là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng AB. Biết điểm N có tung độ dương và đường thẳng MN có phương trình $3x+y-3=0$, tìm tọa độ của các đỉnh A, B, C, D của hình thang ABCD.





+) $N \in MN \cap (C) \Rightarrow$ tọa độ N là nghiệm của hpt:

$\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$, do N có tung độ dương nên $N\left(\frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right); N_1(2;-3)$

+) Tứ giác BMND nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{BDM} = 45^0 \Rightarrow MN$ là đường phân giác góc $\widehat{BNA} \Rightarrow N_1$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow IN_1 \perp AB$ với $I(2;0)$ là tâm của $(C) \Rightarrow AB: y = 0$.

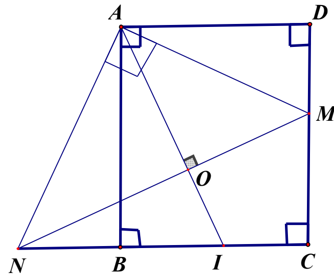
+) $M = MN \cap AB \Rightarrow M(1;0)$, A, B là các giao điểm của đt AB và $(C) \Rightarrow A(-1;0)$ và $B(5;0)$ hoặc $A(5;0)$ và $B(-1;0)$. Do $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ nên $A(-1;0)$ và $B(5;0)$

+) $AN: 2x - y + 2 = 0, MD: y = 1 \Rightarrow D = AN \cap MD \Rightarrow D(1;4)$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow C(5;4)$

Câu 23 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD và M là một điểm thuộc cạnh CD. Qua điểm A dựng đường thẳng d vuông góc với AM, d cắt đường thẳng BC tại điểm N. Biết rằng trung điểm của đoạn thẳng MN là gốc tọa độ O, I là giao điểm của AO và BC. Tìm tọa độ điểm B của hình vuông biết $A(-6;4), O(0;0), I(3;-2)$ và điểm N có hoành độ âm.





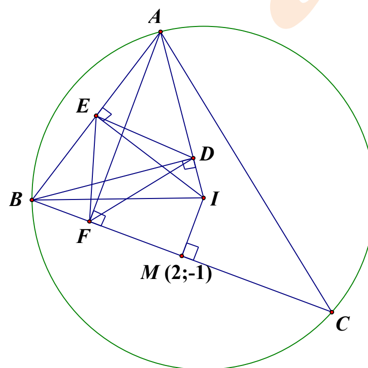
Chứng minh được tam giác AMN vuông cân tại A.

$MN: 3x - 2y = 0,\ N(-4;-6)$

$BC: 4x - 7y - 26 = 0,\ AB: 7x + 4y + 26 = 0$

$B\left(-\frac{6}{5};-\frac{22}{5}\right)$

Câu 24 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I, điểm $M(2;-1)$ là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của B lên AI là $D\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$. Biết rằng AC có phương trình $x + y - 5 = 0$, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.



Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên BC, E là trung điểm AB. Ta có tứ giác BFDA nội tiếp đường tròn đường kính AB và ngũ giác BEDIM nội tiếp đường tròn đường kính BI suy ra



$\angle DEM = \angle DBM = \angle DBF = \frac{1}{2}\angle DEF$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn 1 cung) nên EM là phân giác của góc $\angle DEF$, lại có $FE = DE = \frac{1}{2}AB$ nên ME là đường trung trực của DF.

Đường thẳng ME qua M và song song với AC nên có phương trình $x + y - 1 = 0$, F đối xứng với D qua ME nên $F\left(\frac{13}{5};-\frac{6}{5}\right), \overrightarrow{MF} = \left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$ nên vectơ pháp tuyến của BC là $\vec{n}(1;-3)$ suy ra phương trình BC là $x - 3y - 5 = 0$

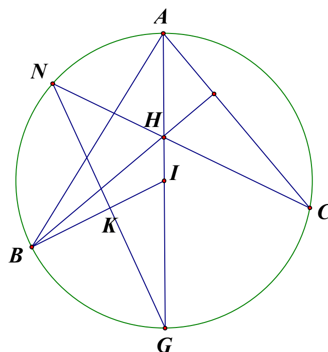
Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$

M là trung điểm BC suy ra $B(-1;-2)$. AF qua F và vuông góc với BC nên có phương trình

$3x + y - \frac{33}{5} = 0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x + y - \frac{33}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;4)$

Câu 25 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm $I(0;5)$. Đường thẳng AI cắt đường tròn tại $M(5;0)$ (M khác A). Đường cao qua C cắt đường tròn tại $N\left(-\frac{17}{5};-\frac{6}{5}\right)$, (N khác C). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết hoành độ điểm B lớn hơn 0.





I là trung điểm AM $\Rightarrow A(-5;10)$

ΔABC cân tại A

=> AM là trung trực của $BC \Rightarrow MB = MC$, H là trực tâm $\Rightarrow BH \parallel MC$ (cùng vuông góc với AC),

$CH \parallel MB$ (cùng $\perp$AB) => tứ giác BMCH là hình bình hành, do $HM \perp BC \Rightarrow BMCH$ là hình thoi =>

BC là phân giác của $\widehat{NCM} \Rightarrow BN = BM \Rightarrow \Delta BMN$ cân tại B. Gọi K là trung điểm MN

$\Rightarrow BK \perp MN(1)$. Mặt khác tam giác IMN có $IM = IN = R \Rightarrow \Delta IMN$ cân tại I $\Rightarrow IK \perp MN(2)$.

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ B, K, I thẳng hàng $\Rightarrow BI \perp MN$.

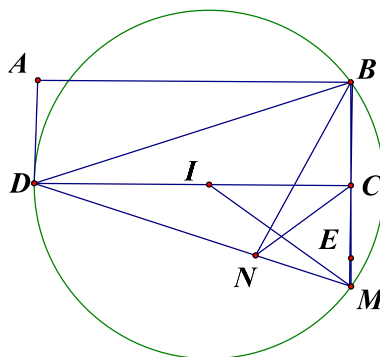
$\left(\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-42}{5};\frac{-6}{5}\right)\right)$ BI $\begin{cases} qua \ \ I(0;5) \\ \perp MN \end{cases} \Rightarrow pt\ BI: 7x + y - 5 = 0$

$B \in BI \Rightarrow B(b;5-7b) \Rightarrow \overrightarrow{IB}(b;-7b), \overrightarrow{IM}(5;-5)$

Ta có: $IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow b^2 + 49b^2 = 50 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow B(1;-2)$

$BC\begin{cases} qua\ B(1;-2) \\ \perp IM \end{cases} \Rightarrow BC: x - y - 3 = 0$

Câu 26 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x - 4y - 17 = 0$; đường thẳng BC đi qua điểm $E(7;0)$ và điểm M có tung độ âm.





+ (T) có tâm I(4;1); R = 5.

+ Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và N, C là chân các đường cao nên chứng minh được: IM ⊥ CN

+ Lập ptđt IM qua I và IM ⊥ CN: $4(x-4)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-19=0$

+ M là giao điểm (T) với IM: $\left[\begin{array}{l} M(7;-3) \\ M(1;5)\ (loai) \end{array}\right.$

+ Đường thẳng BC qua M, E có phương trình: $x=7$

+ C là giao điểm BC và N => C(7;1)

+ B đối xứng M qua C => B(7;5)

+ Đường thẳng DC qua C và vuông góc BC: y = 1

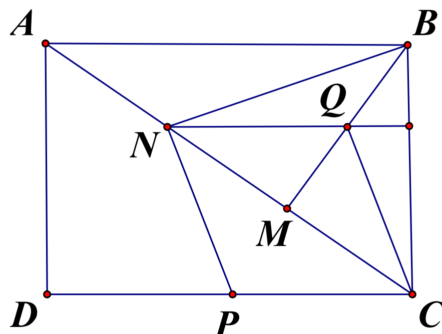
D là giao điểm (T) và $DC:\left[\begin{array}{l} D(9;1) \\ D(-1;1) \end{array}\right.$

Vì B, D nằm cùng phía với CN nên D(-1; 1)

+ Do $\overline{BA}=\overline{CD} \Rightarrow A(-1;5)$

Câu 27 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh B thuộc đường tròn $x^2+y^2=10$, đỉnh C thuộc đường thẳng $x+2y-1=0$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của B lên AC. Biết rằng các điểm $N\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right), P(1;1)$ lần lượt là trung điểm của AM, CD đồng thời B có hoành độ dương, C có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.





Gọi Q là trung điểm BM thì PCQN là hình bình hành nên NP//CQ, nên mặt khác Q là trực tâm trong tam giác BNC nên CQ $\perp$ BN suy ra BN $\perp$ NP.

Ta có $\overrightarrow{NP}=\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng BN nên phương trình đường thẳng BN là $\frac{8}{5}\left(x+\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{5}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+y+1=0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x^2+y^2=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1-2x\\5x^2+4x+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases} \vee \begin{cases}x=\frac{-9}{5}\\y=\frac{13}{5}\end{cases}$$

Suy ra $B(1;-3)$ vì B có hoành độ dương.

Gọi $C(1-2c;c)$ ta có $\overrightarrow{CB}=(2c;-3-c),\overrightarrow{CP}=(2c;1-c)$ do CB $\perp$ CP nên $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CB}=0$

$\Rightarrow 4c^2-(3+c)(1-c)=0 \Leftrightarrow 5c^2+2c-3=0 \Leftrightarrow c=-1 \vee c=\frac{3}{5}$

do C có tung độ âm nên $C(3;-1)$

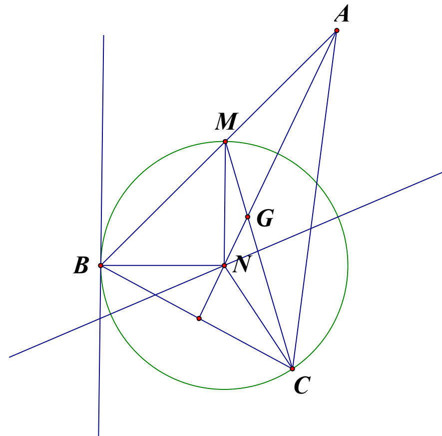
Suy ra $D(-1;3),A(-3;1)$

Vậy $A(-3;1),B(1;-3),C(3;-1),D(-1;3)$

Câu 28 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm G(2;2). Trung điểm cạnh AB là . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM cắt đường thẳng AG tại điểm thứ hai là N.



Biết đường thẳng vuông góc với BN tại B có phương trình x = -1 và điểm N có hoành độ nhỏ hơn 4. Tìm tọa độ các điểm A, B, C



Trong tam giác ABC ta có $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow C(3;-1)$

Ta có tam giác ABC cân tại A nên đường trung tuyến AG cũng chính là đường phân giác góc A mà N là giao điểm thứ 2 của AG với đường tròn ngoại tiếp AMC nên NM = NC. Ngoài ra AG cũng là đường trung trực của đoạn BC nên NB = NC. Do đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC, đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng vuông góc với BN tại B là: $\Delta : x = -1$

NM = NC nên N thuộc trung trực của MC nên có phương trình $x - 3y + \frac{3}{2} = 0$

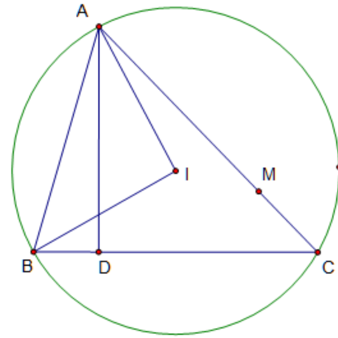
CÁC ĐỀ VUÔNG GÓC TRONG ĐỀ THẦY QUANG BABY

ĐỀ 1

Câu 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;1)$ thỏa mãn $\widehat{AIB} = 90^0$. Chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1;4)$. Tìm tọa độ đỉnh A, B biết rằng A có hoành độ dương.

Lời giải





Do $\widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \Delta ADC$ vuông cân $\Rightarrow D$ thuộc trung trực $AC \Rightarrow ID \perp AC$.

Gọi $AC \cap ID = E$

Ta có $\overrightarrow{ID} = (1;-2) \Rightarrow \begin{cases} AC: x - 2y + 9 = 0 \\ ID: 2x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(-3;3)$.

Gọi $A(2a-9;a) \in AC \xrightarrow{E} C(3-2a;6-a)$.

Ta có

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0 \Rightarrow (4-2a)(2a-8) + (a+1)(7-a) = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow A(-5;1) \Rightarrow l \\ a = 5 \Rightarrow A(1;5), C(-7;1) \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng BC qua $C(-7;1)$ và song song với AD nên $BC: x + 3y + 4 = 0$

Có $IA = 5$ nên phương trình đtròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Tọa độ B thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow B(-7;1) \equiv C \Rightarrow l \\ y = -2 \Rightarrow B(2;-2) \end{array}\right.$.

Vậy $A(1;5); B(2;-2)$.

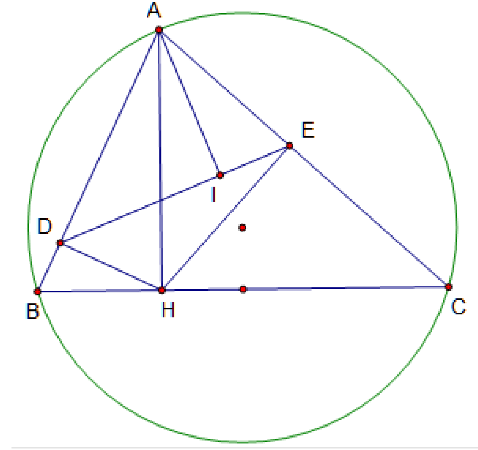
ĐỀ 2

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* nội tiếp *(I,R)* có tọa độ đỉnh *B(2;1)*. H là hình chiếu của *B* lên *AC* sao cho $BH = R\sqrt{2}$, gọi *D* và *E* lần lượt là hình chiếu của *H* lên các cạnh *BA* và *BC*, đường thẳng qua *D* và *E* có phương trình $3x - y + 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác *ABC* biết *H* thuộc $d: 2x + y + 1 = 0$ và *H* có tung độ dương

Lời giải



Trước hết, ta có đẳng thức quen thuộc $BA.BC = 2R.BH$ (ta rút ra từ công thức $\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}h_b.b$)



Gọi K là hình chiếu của B lên DE (Ta sẽ chứng minh K trùng I) ta có: $BD.BA = BH^2 = BE.BC \to \Delta BAC \sim \Delta BED$

$$\Leftrightarrow \frac{BK}{BH} = \frac{BD}{BC} = \frac{BH^2}{BA.BC} = \frac{2R^2}{2R.BH} = \frac{R}{BH}$$

Ta suy ra được $BK = R$, mà $\widehat{EBK} = \widehat{ABH} = \widehat{EBI} \Rightarrow I \equiv K$

Vậy ta được $BI \perp ED$

Gọi I là hình chiếu của B lên DE

DE$\Rightarrow I(-1;2) \to BI = R = \sqrt{10} \to BH = \sqrt{20}$

Gọi $H(t;-1-2t) \Rightarrow BH^2 = (2-t)^2 + (2+2t)^2 = 20$

$$\to \left[\begin{array}{l} t = \frac{6}{5} \\ t = -2 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} H\left(\frac{6}{5};-\frac{17}{5}\right) \\ H(-2;3) \end{array}\right. \to H(-2;3)$$

Phương trình đường thẳng AC là $2x - y + 7 = 0$

Tọa độ A, C là nghiệm hệ $\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{-11+\sqrt{41}}{5};\frac{13+2\sqrt{41}}{5}\right) \\ C\left(\frac{-11-\sqrt{41}}{5};\frac{13-2\sqrt{41}}{5}\right) \end{cases}$

Vậy $A\left(\frac{-11+\sqrt{41}}{5};\frac{13+2\sqrt{41}}{5}\right), C\left(\frac{-11-\sqrt{41}}{5};\frac{13-2\sqrt{41}}{5}\right)$



ĐỀ 3

Câu 31 .Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thang vuông *ABCD* vuông tại *A* và *B* có phương trình cạnh $CD: x+3y+5=0$. Gọi *M* là trung điểm *AB*, *H* là chân các đường vuông góc kẻ từ *A* đến *MD*, K là chân đường vuông góc kẻ từ *B* đến *MC*, đường thẳng *AH* cắt đường thẳng *BK* tại $N\left(\frac{2}{3};2\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang *ABCD* biết điểm *M* thuộc $d: 4x-y-1=0$ và trung điểm *E* của *MB* có tọa độ $E\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải:

Ta có ΔAMD vuông tại *A, AH* là đường cao

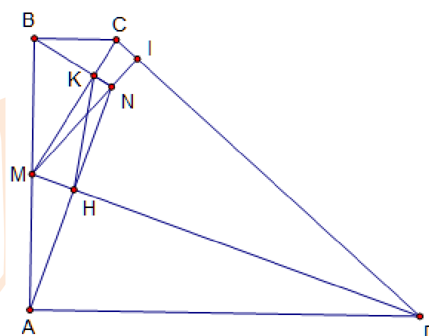
$\Rightarrow AM^2 = MH.MD$

ΔBMC vuông tại *B* $\rightarrow BM^2 = MK.MC$

Mà *AM=BM* do đó $MH.MD = MK.MC$

Xét ΔMKH và ΔMDC ta có:

$$\begin{cases} \widehat{KMH}: \text{ chung} \\ \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MK}{MD} \end{cases} \rightarrow \Delta MHK \sim \Delta MDC$$



$\rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{IDH}$

Tứ giác *MKNH* có

$\widehat{MKN} + \widehat{MHN} = 90^o + 90^o = 180^o \rightarrow MKNH$ nội tiếp $\rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MNH}$

Ta có $\widehat{MNH} = \widehat{IDH}\left(=\widehat{MKH}\right) \rightarrow$ Tứ giác *HNID* nội tiếp $\rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{NHD} = 90^o \rightarrow MN \perp CD$

Phương trình đường thẳng *MN* qua *N* vuông góc *CD* là $MN: 3x-y=0$

Tọa độ *M* là nghiệm hệ $\begin{cases} 4x-y-1=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \rightarrow M(1;3)$



Vì *E* là trung điểm *MB* $\rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_E - x_M \\ y_B = 2y_E - y_M \end{cases} \rightarrow B(-1;2)$

Vì *M* là trung điểm *AB* $\rightarrow \begin{cases} x_A = 2x_M - x_B \\ y_A = 2y_M - y_B \end{cases} \rightarrow A(3;4)$

Phương trình cạnh *AD* là $AD: 2x + y - 10 = 0 \rightarrow D(7;-4)$

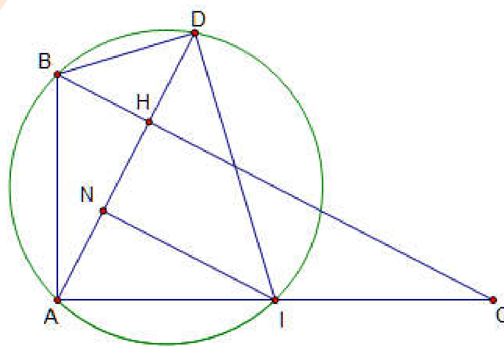
Phương trình cạnh *BC* là $BC: 2x + y = 0 \rightarrow C(1;-2)$

Vậy $A(3;4); B(-1;2); C(1;-2); D(7;-4)$ là các điểm cần tìm.

ĐỀ 4

Câu 32 . Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có đường cao *AH*, trung điểm *I* của *AC*, phương trình cạnh $AC: x - y + 1 = 0$. Trên tia đối tia *HA* lấy điểm *D* sao cho *HA=2HD*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC* biết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔBDI là $(C): (x-2)^2 + y^2 = 5$ và đỉnh *A* có hoành độ dương.

Lời giải



Gọi *N* là trung điểm của *AH* $\rightarrow$ *IN* là đường trung bình

$\Delta ACH \rightarrow \begin{cases} IN \perp AH \\ CH = 2IN \end{cases}$

Xét ΔABC có $HB.HC = AH^2 \rightarrow \frac{HB}{AH} = \frac{AH}{HC}$

Vì $\begin{cases} AH = ND = 2HD \\ HC = 2NI \end{cases} \rightarrow \frac{HB}{ND} = \frac{HD}{NI}$

Suy ra $\Delta BDH \sim \Delta DIN \rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{DIN}$

$\Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{BDN} + \widehat{NDI} = \widehat{DIN} + \widehat{NDI} = 90^o \Rightarrow$ tứ giác *BDIA* nội tiếp



Tọa độ *A, I* là ngiệm hệ $\begin{cases} x-y+1=0 \\ (x-2)^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=0 \Rightarrow y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A(1;2) \\ I(0;1) \end{cases}$ (vì $x_A>0$)

Vì *I* là trung điểm *AC* nên $\begin{cases} x_C=2x_I-x_A=-1 \\ y_C=2y_I-y_A=0 \end{cases} \rightarrow C(-1;0)$

Phương trình *AB* qua *A* vuông góc *AC* là $AB: x+y-3=0$

Tọa độ *B* là nghiệm hệ $\begin{cases} x+y-3=0 \\ (x-2)^2+y^2=5 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow B(4;-1)$

Vậy $A(1;2); B(4;-1); C(-1;0)$ là các điểm cần tìm.

ĐỀ 5

Câu 33 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A, điểm $B(1;2)$. Vẽ đường cao AH, gọi I là trung điểm của AB, đường vuông góc với AB tại I cắt AH tại N. Lấy điểm M thuộc đương AH sao cho N là trung điểm của AM. Điểm $K(-2;-2)$ là trung điểm của NM. Tìm tọa độ điểm A biết A thuộc đường thẳng $x+y-3=0$

Lời giải

ΔABM có IN là đường trung bình , nên $BM // IN$ do đó BM vuông góc $AB \Rightarrow$ tứ giác $INMB$ là hình thang

Kẻ KP vuông góc với $AB \Rightarrow KP$ sẽ là đường trung bình của hình thang $INMB$ (vì có KP song song 2 đáy và đi qua trung điểm của MN)$\Rightarrow P$ là trung điểm của IB

Xét tam giác KBI có KP vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên ΔKBI cân$\Rightarrow KB = KI$

I là điểm thuộc đường tròn tâm $K\left(-2;-2\right)$ bán kính $KB = 5 \Rightarrow \left(K, KB\right):\left(x+2\right)^2+\left(y+2\right)^2 = 25$

Gọi $I\left(x, y\right) \Rightarrow A\left(2x-1;2y-2\right) \Rightarrow$thay vào đường thẳng đi qua A ta có $\left(2x-1\right)+\left(2y-2\right)-3=0$

hay $x+y-3=0$ (2x - 1) + (2y – 2) – 3 = 0

Giải hệ :

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y+2)^2=25\\ x+y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1, y=2(loai)\\ x=2, y=1(tm)\end{cases}$$

$\Rightarrow A\left(3;0\right)$

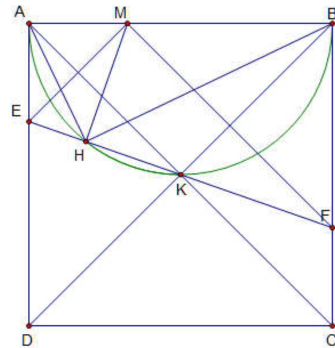
A
I
N
B
H
C
M

ĐỀ 6

Câu 34 .Cho hình vuông $ABCD$ tâm K , M là điểm di động trên cạnh AB . Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AM = AE$, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BM = BF$, phương trình $EF: x-2=0$ .Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M tới đường thẳng EF .Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH là $x^2+y^2+4x-2y-15=0$ và tung độ điểm A và điểm H dương.

Lời giải





Do $ABCD$ là hình vuông nên 2 đường chéo vuông góc (tính chất) $\Rightarrow \widehat{AKB} = 90^0$

Tam giác AME vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{AEM} = 45^0$

Tứ giác $AMHE$ nội tiếp nên $\widehat{MHA} = \widehat{MEA} = 45^0$ '

Tứ giác $ABFH$ nội tiếp nên $\widehat{MHB} = \widehat{MFB} = 45^0$

Tam giác BMF vuông cân tại $B \Rightarrow BMF = BFM = 45^0$

$\Rightarrow AHB = AHM + BHM = 90^0$

$\Rightarrow ABHK$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\begin{cases} BF = DE \\ BF // DE \end{cases} \Rightarrow BFDE$ là hình bình hành

Mà K là trung điểm của BD rồi nên K cũng là trung điểm của EF, do đó K thuộc EF. Tức là H, K là giao điểm của đường tròn đã cho và đường thẳng EF

Tọa độ K, H thỏa mãn

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 3 \\ x = 2, y = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} H(2;3) \\ K(2;-1) \end{array}\right.$$

Gọi N là trung điểm AB. Suy ra N là tâm đường tròn đường kính AB

Do đó $N(-2;1)$

Ta có: $\overrightarrow{KN} = (-4;2)$

Đường thẳng AB đi qua N và vuông góc với KN nên phương trình $AB: 2x - y + 5 = 0$



Toạ độ điểm A và B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y-15=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y=5 \\ x=-4, y=-3 \end{cases}$

Mà tung độ điểm A dương. Suy ra $A(0;5), B(-4;-3)$

Ta có: K trung điểm AC $\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 2.2-0=4 \\ y_C = 2y_I - y_A = 2.(-1)-5=-7 \end{cases} \Rightarrow C(4;-7)$

Ta có: I trung điểm BD $\Rightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = 2.2+4=8 \\ y_D = 2y_I - y_B = 2.(-1)+3=1 \end{cases} \Rightarrow D(8;1)$

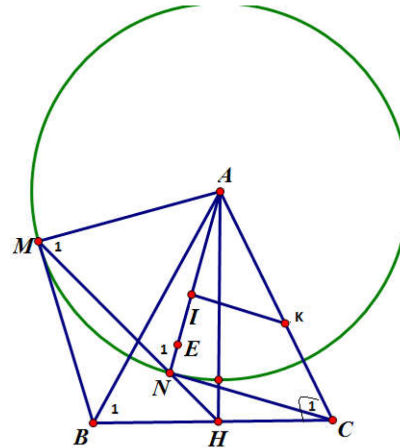
Vậy $A(0;5), B(-4;-3), C(4;-7), D(8;1)$

ĐỀ 7

Câu 35 Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại A có điểm $A \in (C): x^2+y^2-2x+4y-20=0$, điểm $B(1;3)$, đường cao AH. Vẽ đường tròn (C) tâm A bán kính $R < AH$. Từ B kẻ đường tiếp tuyến của (C') tại tiếp điểm M. Đoạnt hẳng MH cắt (C') tại N. Các điểm I, K theo thứ tự là trung điểm của AN và AC. Tìm độ các điểm A, C biết rằng đường thẳng IK có phương trình $x+3y+8=0$ và AN đi qua $E(1;7)$ và $y_A < 0$

Lời giải





Nhận xét : Với hình vẽ trên ta thấy rằng CN vuông góc AN , một tính chất rất quen thuộc trong bài toán oxy hiện nay , Việc của chúng ta là chứng minh điều đó ? Khi đó IK vuông góc AN

=> Viết được phương trình đường thẳng AN

Ta thấy các góc ký hiệu là 1 bằng nhau : $M_1 = N_1$ vì AMN là tam giác cân tại A , $M_1 = B_1$ do AMBH nội tiếp , $B_1 = C_1$ do tam giác ABC cân . Vậy $C_1 = N_1$ => Tứ giác ANHC nội tiếp => Góc CNA = Góc CHA = 90^o , => IK vuông góc AN .

BƯỚC 2 : Tính toán :

Viết phương trinh đường thẳng AN qua E(1,7) và vuông góc với IK : $3x-y+4=0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x-y+4=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-20=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow y=\dfrac{14}{5} \\ x=-3 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$$

Chọn A(-3,-5) => $AB^2 = 20$

Tham số hóa điểm I(a,b) => 3a – b + 4 = 0

Ta có : AB = AC = 2AI => $AB^2 = 4AI^2$ => $20 = 4.[(a+3)^2 + (b+5)^2] = 20$

Giải hệ : $\begin{cases} a-3b+4=0 \\ 4[(a+3)^2+(b+5)^2]=20 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=-5 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow K(-5,-1) \Rightarrow C(-7,3) \\ \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=-3 \Rightarrow K(1,-3) \Rightarrow C(5,-1) \end{array}\right. \end{array}\right.$

Vậy $A(-3,-5), C(-7,3)$ hoặc $C(5,-1)$

ĐỀ 10



Câu 36. Cho điểm A thuộc Elip (E) có tam sai e = 4/5 , tiêu cự là 8 . Qua điểm A vẽ một hình vuông ABCD có tâm là I(2,1) .Điểm G thuộc cạnh BC . Điểm H thuộc cạnh CD sao cho $\angle GIH = 45^O$. M là trung điểm của AB . Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông và tọa độ điểm G . Biết rằng đường thẳng MG vuông góc với (d) : 5x + y + 7 = 0 . Điểm K(-5,-2) thuộc đường thẳng AH .Biết y_A nguyên dương .

Lời giải : Câu này có cách chứng minh hình học thuần túy , các em theo dõi video sau :

https://www.youtube.com/watch?v=uhqg1e-OwdA&index=2&list=PLOE2nwWdLO_GydXQFMk8nTb0wubFTbt3l

Nhận xét , bài toán cho hình vuông , nên ta hoàn toàn có thể chuẩn hóa độ dài cạnh hình vuông là 2 (đơn vị độ dài) – Mỗi đơn vị là bao nhiêu trong thực tế ta không cần quan tâm , để thấy tính chất của hình vuông sẽ không thay đổi nếu ta làm như sau .

Chọn hệ trục với $B(0;0);C(0;2);A(2,0);D(2;2)\Rightarrow M(0;1)$.

$Goi\ G(0;x);H(2;t);\overrightarrow{AH}=(0;t)\equiv(0;1)$

$$\Rightarrow \frac{|-1+(x-1)(1-t)|}{\sqrt{1+(x-1)^2}.\sqrt{1+(1-t)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}G\left(0;\frac{2t-2}{t}\right)\\ G\left(0;\frac{-2}{t-2}\right)\end{array}\right..\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{MG}=\left(0;\frac{t-2}{t}\right)\perp(0;1).\\ \overrightarrow{MG}=(0;1)\end{array}\right.\Rightarrow MG\perp AH.$$

Ta có $\begin{cases}2c=8\\ \frac{e}{a}=\frac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow a^2=25\Rightarrow b^2=9\Rightarrow(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

Phương trình đường thẳng $AH: x-5y-9=0.$

Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\\ x-5y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5y+5\\ \frac{(5y+9)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(5;0)\\ A\left(-4;-\frac{9}{5}\right)\end{array}\right.\Rightarrow A(5;0)\Rightarrow C(-1;2).$$

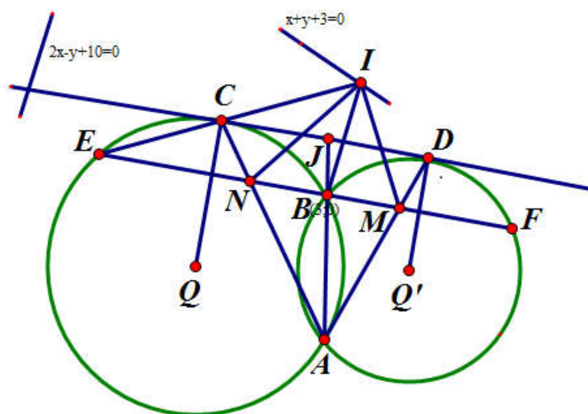
Phương trình BD qua I vuông góc AC là $3x-y-5=0$. Gọi $B(b;3b-5)\Rightarrow D(4-b;7-3b)$.

Có $AD=BC\Rightarrow b=1\vee b=3\Rightarrow B(3;4);D(1;-2)\vee B(1;-2);D(3;4).$

Câu 37: Oxy cho 2 đường tròn (Q),(Q') giao nhau tại A, B(3;0), kẻ tiếp tuyến chung CD, Điểm C thuộc Q , điểm D thuộc Q' , Qua B kẻ cát tuyến song song với CD cắt (Q) tại E cắt (Q') tại F.



$EC \cap FD$ tại $I \in x+y+3=0$. $DA \cap$ EF tại M, $CA \cap$ EF tại N. Biết $S_{IMN} = 20$. Tìm I M, N. Biết rằng CD vuông góc với đường thẳng : 2x – y + 10 = 0



QC là trung trực ED

Q'D là trung trực BF

$\Rightarrow CD = \frac{1}{2}EF$

Do CD // EF nên CD là đường trung bình $\triangle$IEF

$\Rightarrow \begin{cases} CI = CE = CB \\ DI = DF = DB \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \triangle ICD = \triangle BCD(c_c_c) \\ IB \perp EF//CD \end{cases}$

⇨ CD là trung trực IB

⇨ I(1;-4)

$IB \perp CD \Rightarrow IB: 2x - y - 6 = 0$

$\overrightarrow{IB}(2;-4) \Rightarrow IB = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} MN: x + 2y - 3 = 0 \\ MN = 4\sqrt{5} = 2IB \end{cases}$

Gọi $J = AB \cap CD \Rightarrow JD^2 = JA + JB = JC^2 \Rightarrow JB = JC \Rightarrow BM = BN = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \triangle IMN$ vuông cân tại I $\Rightarrow IM = IN = 2\sqrt{10}$

Gọi M(3-2m,m) $\Rightarrow N(2m+3;-m)$

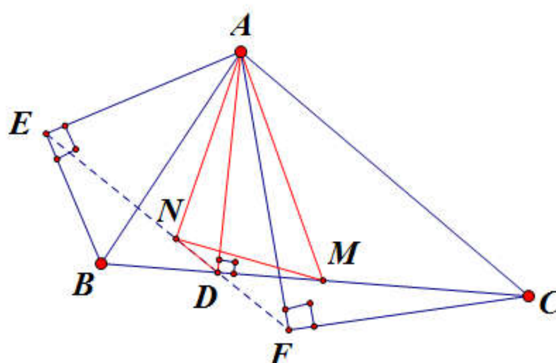
Do $IM = 2\sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-1;2) \Rightarrow N(7;-2) \\ M(7;-2) \Rightarrow N(-1;2) \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} I(1;-4), M(-1;2), N(7;-2) \\ I(1;-4), M(7;-2), N(-1;2) \end{array}\right.$

ĐỀ 17



Câu 38: Cho $\triangle ABC$ có đường cao AH. Cho điểm A thuộc đường thẳng: 5x - 2y – 1 = 0. Qua H kẻ đường thẳng qua E, F sao cho $\widehat{AEB} = 90^0, \widehat{AFC} = 90^0$. Gọi M(-2;3) là trung điểm BC, N(-1;1) là trung điểm EF. Tìm phương trình BC.Biết điểm A thuộc đường thẳng : 5x – 2y – 1 = 0 , H thuộc đường tròn : $(x+1)^2 + y^2 = 16$



Tính chất : Ta nhìn thầy AN vuông góc với NM

Chứng minh :

Xét 2 tam giác AEF và ABC có :

$\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ do tứ giác AEBD nội tiếp

$\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ do tứ giác ACFD nội tiếp

AN là trung tuyến tam giác AEF , AM là trung tuyến trong tam giác ABC

Nên : $\dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AF}{AC}$

Xét tam giác ANF và AMC đồng dạng vì c.g.c

$\widehat{ANF} = \widehat{AMC} \Rightarrow$ Tứ giác AMDN nội tiếp (tính chất góc ngoài)

Tính toán :

Đường thẳng AN qua N và nhận véc tơ MN = (1,-2) là véc tớ pháp tuyến : x – 2y + 3 = 0

⇨ A(1,2)

Đường tròn ngoại tiếp tứ giác (ANHM) : $x^2 + y^2 + x - 5y + 4 = 0$

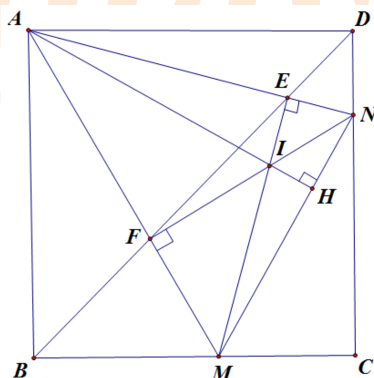


Điểm H là giao điểm của 2 đường tròn (C) và (ANHM) $\left[\begin{array}{l} H(-1,4) \\ H(\frac{7}{13};\frac{48}{13}) \end{array}\right.$

Đáp số : có 2 đường thẳng B,C qua H,M : $\left[\begin{array}{l} BC: x-y+5=0 \\ BC: 3x-11y+39=0 \end{array}\right.$

ĐỀ 19

Câu 39: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(4;6)$. Goi M,N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0, N(-5;8)$ và đường thẳng MN có phương trình $38x+y+182=0$. Tìm tọa độ các điểm B,C,D



Gọi $E=BD\cap AN, F=BD\cap AM, I=ME\cap NF$.

Ta có $\widehat{MAN}=\widehat{NDB}=\widehat{MBD}=45^0$ nên hai tứ giác $ADNF, ABNE$ nội tiếp.

Do đó $ME\perp AN, NF\perp AM \Rightarrow I$ **là trực tâm** $\Delta AMN \Rightarrow AI\perp MN$.

Gọi $H=AI\cap MN$. Ta có $ABME, MNEF$ là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AND}=\widehat{AFD}=\widehat{ANH}$

$\Rightarrow \Delta AND=\Delta ANH$. Do đó D là điểm đối xứng của H qua đường thẳng AN.



Từ $AH \perp MN \equiv H \Rightarrow H\left(-\frac{84}{17};\frac{98}{17}\right)$. Do D là điểm đối xứng của H qua đường thẳng AN.

nên ta tìm được $D(-4;10)$.

Ta có $AD = DC = 4\sqrt{5}; DN = \sqrt{5} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{DN} \Rightarrow C(-8;2)$. Từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow B(0;-2)$

Bài 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường phân giác trong BD có phương trình $x + y - 2 = 0$. Đường trung tuyến BN có phương trình $4x + 5y - 9 = 0$. Điểm $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$ nằm trên cạnh BC. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{15}{6}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(Đề thi thử Trường THPT chuyên Hùng Vương - 2015 - 2016)

Đáp án: Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x + 5y - 9 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1;1)$

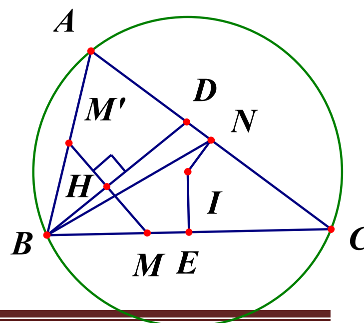
Phương trình BC đi qua B và M: $x + 2y - 3 = 0$

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua BD thì $M' \in BA$

Phương trình đường thẳng MM' qua M, vuông góc $BD: 2x - 2y - 3 = 0$

H là giao điểm MM' và BD suy ra $H\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right)$. Ta có H là trung điểm MM' nên $M'\left(\frac{3}{2};0\right)$

Phương trình BA qua B và M': $2x + y - 3 = 0$.



Gọi tọa độ $A(a;3-2a) \in BA; C(3-2b;b) \in BC$

N là trung điểm AC thì $N\left(\frac{3-2b+a}{2};\frac{3-2a+b}{2}\right)$



Vì $N \in BN \Rightarrow 4.\frac{3-2b+a}{2}+5.\frac{3-2a+b}{2}-9=0 \Rightarrow b=3-2a$

Suy ra $A\left(\frac{3-b}{2};b\right);C(3-2b;b) \Rightarrow N\left(\frac{9-5b}{4};b\right)$. Phương trình AC là $y=b$

Phương trình đường trung trực AC vuông góc AC tại N có dạng $x=\frac{9-5b}{4}(d)$

Gọi E là trung điểm BC suy ra $E\left(2-b;\frac{1+b}{2}\right)$

Phương trình trung trực BC đi qua E vuông góc BC có dạng: $2x-y-\frac{7-5b}{2}=0(d')$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì I là giao điểm (d) và (d') nên có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x-y-\frac{7-5b}{2}=0 \\ x=\frac{9-5b}{4} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9-5b}{4};1\right)$$

Ta có: $BI=\left|\frac{9-5b}{4}-1\right|=\frac{15}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=3 \end{array}\right.$

+ Với $b=-1 \Rightarrow C(5;-1)$ thỏa mãn M thuộc cạnh BC. Suy ra $A(2;-1)$

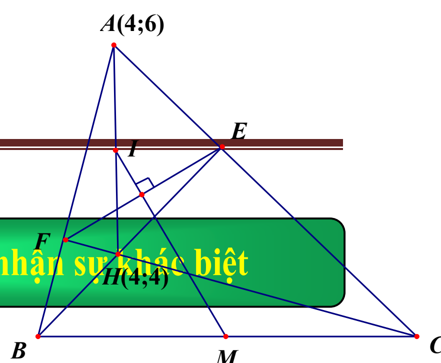
+ Với $b=3 \Rightarrow C(-3;3)$, M không thuộc cạnh BC, loại:

Vậy $A(2;-1),B(1;1),C(5;-1)$

Bài 41. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;6)$ trực tâm H(4;4), trung điểm M của cạnh BC thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-1=0$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C của tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết đường thẳng EF song song với đường thẳng $d: x-3y+5=0$.

(Đề thi thử Trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội - Lần 1 - 2015 - 2016)

Đáp án: Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH, BC. Dễ thấy các điểm A, H, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH, có tâm là I; còn các điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC, có





tâm là M. Vì EF là dây cung chung của hai đường tròn nói trên nên $IM \perp EF$, kéo theo $IM \perp d$. Từ đó, viết được phương trình đường thẳng $IM: 3x+y-17=0$. Do $M=\Delta \cap d$ nên suy ra $M(5;2)$.

Đường thẳng BC vuông góc AH, đi qua M nên $BC: y-2=0$. Từ đó, gọi tọa độ điểm $B(b;2)$ thì tọa độ $C(10-b;2)$. Vì $BH \perp AC$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}=0$, suy ra $(6-b).(b-4)+(-4).(-2)=0$, từ đó tìm được $b=2$ hoặc $b=8$.

Suy ra $B(2;2), C(8;2)$ hoặc $B(8;2), C(2;2)$

Bài 42. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho tam giác ABC có góc A tù. Hãy viết phương trình các cạnh tam giác ABC biết chân 3 đường cao hạ từ đỉnh A,B,C lần lượt có tọa độ là: $D(-1;-2), E(2;2), F(-1;2)$

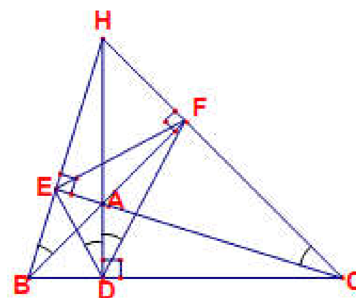
(Đề thi thử Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa - 2015 - 2016)

Đáp án:

Trước hết ta chứng minh rằng khi ΔABC tù ở A thì A tâm vòng tròn nội tiếp ΔDEF.

Thật vậy: Do 2 tứ giác nội tiếp BDAE và DCFA nội tiếp nên:

$$\begin{cases} ADE = ABE = 90^0 - BHF \\ ADF = ACF = 90^0 - FHB \end{cases} \Rightarrow ADE = ADF$$



Hay DH là tia phân giác góc FDE. Tương tự như vậy ta cũng có EA là phân giác của góc DEF suy ra A là tâm vòng tròn nội tiếp ΔDEF.

Phân giác trong và ngoài tại D: $d_1: 3x-y+1=0$; $d_2; x+3y+7=0$

Phân giác trong và ngoài tại E: $e_1: x-2y+2=0$; $e_2: 2x+y-6=0$

Phân giác trong và ngoài tại F: $f_1: x+y-1=0$; $f_2: x-y+3=0$

Vì ΔABC có góc A tù thì 3 cạnh BC, CA, AB của nó có phương trình là: d_2, e_1, f_1

Vậy $BC: x=3y-7=0$; $CA: x-2y+2=0$; $AB: x+y-1=0$

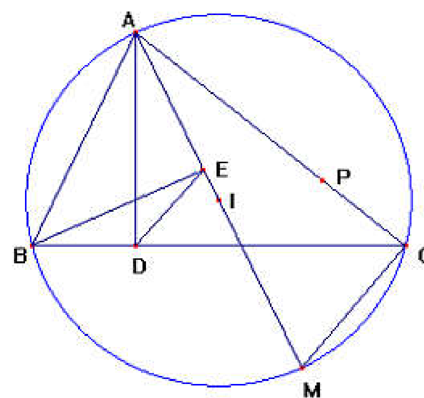


Bài 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I, có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0, D(2;-1)$ là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A. Gọi điểm $E(3;1)$ là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AI; điểm $P(2;1)$ thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Đề thi thử Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa - 2015 – 2016)

Đáp án: Gọi M là điểm đối xứng của A qua I.

Ta có $BCM = BAM = EDC$ (Do tứ giác ABDE nội tiếp). Từ đó suy ra $DE // MC$ mà $MC \perp AC \Rightarrow DE \perp AC$. Ta có: $\overrightarrow{DE} = (1;2)$



Phương trình $AC: 1(x-2)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-4=0$. Ta có $\{A\} = d \cap AC$. Tọa độ của A thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$$

Ta có $\overrightarrow{AD} = (2;-3), \overrightarrow{AE} = (3;-1)$

Phương trình $BE: 3(x-3)-(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-y-8=0$

Phương trình $BD: 2(x-2)-3(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-7=0$. $\{B\} = BE \cap BD$

Tọa độ của B thỏa hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y-8=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{7} \\ y=-\dfrac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$

Ta có $\{C\} = AC \cap BD$ nên tọa độ của C thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x+3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{26}{7} \\ y=\dfrac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{26}{7};\dfrac{1}{7}\right)$$

Kết luận: $A(0;2), B\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{5}{7}\right), C\left(\dfrac{26}{7};\dfrac{1}{7}\right)$



Bài 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(\frac{3}{2};2\right)$, tâm đường tròn nội tiếp $K(2;1)$. Tìm tọa độ đỉnh B biết $x_B > 3$.

(Đề Thi Thử THPT Chuyên Nguyễn Huệ 2016 Lần 1)

Đáp án: Gọi D là giao của AK với đường tròn (I).

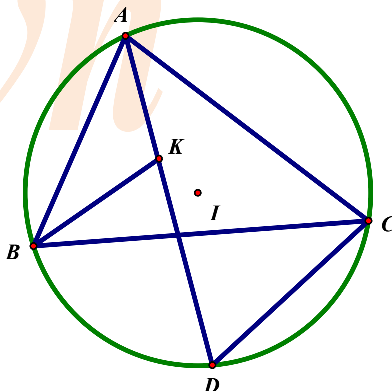
Phương trình đường thẳng AK là: $x + 3y - 5 = 0$

Ta có: $KBD = \frac{1}{2}(ABC + BAC) = BKD$. Do đó ΔKBD cân tại D.

Gọi $D(5-3a;a)$ thuộc AK. Vì D khác A nên $a \neq 2$. Ta có:

$$ID^2 = IA^2 \Leftrightarrow \left(5-3a-\frac{3}{2}\right)^2 + (a-2)^2 = \left(-1-\frac{3}{2}\right)^2 + (2-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2\ (L) \\ a = \frac{1}{2}\ (N) \end{array}\right.$$

Suy ra $D\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$



Gọi $B(x,y)$ với x >3 , ta có hệ:

$$\begin{cases} IB = IA \\ DB = DK \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4} \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3x-4y=0 \\ x^2+y^2-7x-y+10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3x-4y=0 \\ 4x-3y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; y=2\ (TM) \\ x=\frac{5}{8}; y=-\frac{5}{2}\ (L) \end{array}\right.$$

Vậy $B(4;2)$

Bài 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $C(2;-5)$ và nội tiếp đường tròn tâm I. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (I) lấy điểm E, trên tia đối của tia EA lấy điểm M sao cho $EM = EC$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: y-2=0$ và điểm $M(8;-3)$.



(Đề Thi Thử THPT Chuyên Phú Yên 2016 Lần 1)

Đáp án: BE cắt CM tại F.

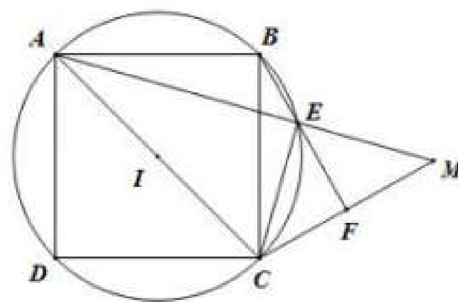
AC là đường kính của (I) nên $\widehat{AEC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CEM} = 90^0$

Suy ra tam giác ECM vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{ECF} = 45^0$

ABEC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CEF} = \widehat{CAB} = 45^0$ (ΔCAB vuông cân)

Suy ra ΔECF vuông cân tại F.

EF là đường cao của tam giác cân $ECM \Rightarrow F$ là trung điểm CM.



$\Rightarrow F(5;-4)$

Đường thẳng BF đi qua F, nhận vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{CM} = (3;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

=> Phương trình $BF: 3x + y - 11 = 0$

Tọa độ của điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 3x + y - 11 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3;2)$$

Ta có: $\overrightarrow{CB} = (1;7)$. Do đó đường thẳng BC qua B và nhận vectơ $\vec{n} = (7;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình $BC: 7x - y - 19 = 0$

AB qua B và nhận $\overrightarrow{CB} = (1;7)$ làm vec tơ pháp tuyến.

Phương trình $AB: x + 7y - 17 = 0$

Gọi $A(17 - 7a; a) \in AB$. Ta có: $AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{(14 - 7a)^2 + (a - 2)^2} = \sqrt{50}$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \end{array}\right.$$

A và M nằm khác phía so với BC nên $(7x_A - y_A - 19)(7x_M - y_M - 19) < 0$

$a = 1 \Rightarrow A(10;1) \Rightarrow (7x_A - y_A - 19)(7x_M - y_M - 19) > 0$ (loại)



$a=3\Rightarrow A(-4;3)\Rightarrow (7x_A-y_A-19)(7x_M-y_M-19)<0$ (thỏa mãn)

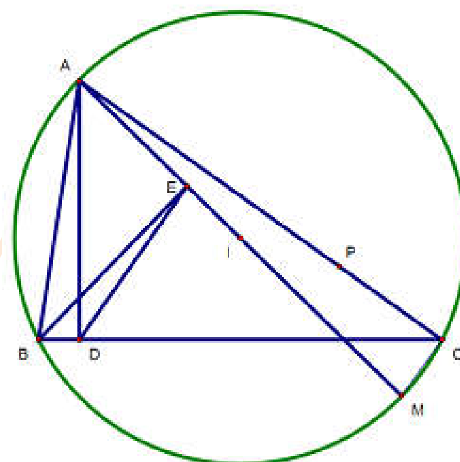
Vậy $A(-4;3)$

Bài 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm I; có đỉnh A thuộc đường thẳng $(d): x+y-2=0, D(2;-1)$ là chân đường cao của ΔABC hạ từ đỉnh A. Gọi $E(3;1)$ là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AI; điểm $P(2;1)$ thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

(Đề Thi Thử THPT Chuyên Biên Hòa Phú Thọ 2016)

Đáp án: Gọi M là điểm đối xứng của A qua I.

Chứng minh $DE//CM\Rightarrow DE\perp AC$. $\overrightarrow{DE}=(1;2)$



Phương trình đường thẳng AC là $x+2y-4=0$

Tọa độ điểm A thỏa mãn $\begin{cases}x+2y-4=0\\x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow A(0;2)$

$\overrightarrow{AD}(2;-3);\overrightarrow{AE}(3;-1)$

Phương trình đường thẳng BE là $3x-y-8=0$

Phương trình đường thẳng BD là $2x-3y-7=0$

Tọa độ điểm B thỏa mãn $\begin{cases}3x-y-8=0\\2x-3y-7=0\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{17}{7};\frac{-5}{7}\right)$

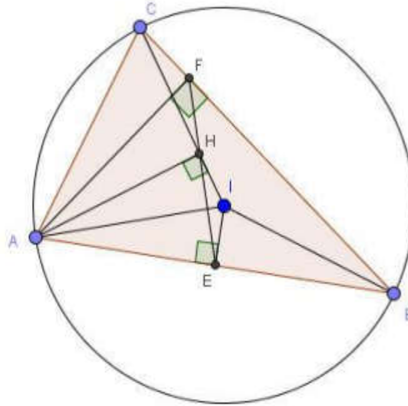
Tọa độ điểm C thỏa mãn $\begin{cases}x+2y-4=0\\2x-3y-7=0\end{cases}\Rightarrow C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right)$

Bài 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác ABC. Điểm $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm cạnh AC và $H\left(-\frac{4}{5};\frac{22}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng CI, biết đường thẳng BC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Đề thi thử THPT Số 3 Bảo Thắng Lào Cai 2016 Lần 1)



Đáp án:



Ta có: $\overrightarrow{EH}=\left(-\frac{13}{10};\frac{39}{10}\right)$ suy ra phương trình đường thẳng $EH: 3x+y-2=0$.

$F=BC\cap EH\Rightarrow$ tọa độ điểm F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+y-2=0\\x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}\Rightarrow F(-1;5)\Rightarrow EF=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AI nên $IHE=IAE=FHC$ (1)

Lại có $\begin{cases}IAE=IBE\\ICB=IBC\\EFB=CFH+FCH\end{cases}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $EBF=EFB\Rightarrow\Delta FEB$ cân tại E

$$\Rightarrow EF=AE=EB=\frac{3\sqrt{10}}{2}\Rightarrow AF\perp FB\Rightarrow AF\perp BC$$

Suy ra đường thẳng AF đi qua F và vuông góc với BC là: $x-y+6=0$. Gọi $A(t;6+t)\in AF$

$$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2}-t;-\frac{11}{2}-t\right)\Rightarrow AE=\frac{3\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(-\frac{11}{2}-t\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2t^2+10t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-4\end{array}\right.$$



Với $t=-1\Rightarrow A(-1;5)$ loại do trùng với F. Với $t=-4\Rightarrow A(-4;2)$. Do E là trung điểm của đoạn AB $\Rightarrow B(5;-1)$

$\overrightarrow{AH}\left(\frac{16}{5};\frac{12}{5}\right)$ suy ra phương trình đường thẳng IC đi qua H và vuông góc với AH là: $4x+3y-10=0$.

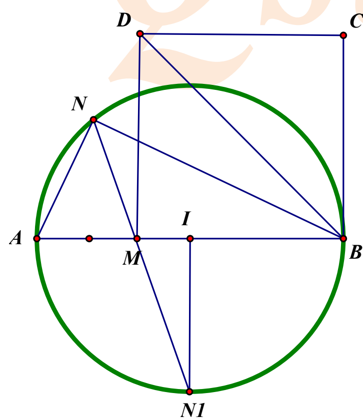
Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x+3y-10=0\\x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=6\end{cases}\Rightarrow C(-2;6)$

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác là: $A(-4;2);B(5;-1);C(-2;6)$

Bài 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại B và C có $AB>CD$ và CD = BC. Đường tròn đường kính AB có phương trình $x^2+y^2-4x-5=0$ cắt cạnh AD của hình thang tại điểm thứ hai N. Gọi M là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng AB. Biết điểm N có tung độ dương và đường thẳng MN có phương trình $3x+y-3=0$, tìm tọa độ của các đỉnh A, B, C, D của hình thang ABCD.

(Đề thi thử THPT Đa Phúc Hà Nội 2016 Lần 1)

Đáp án:



+ $N\in MN\cap(C)$ => tọa độ N là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}3x+y-3=0\\x^2+y^2-4x-5=0\end{cases}$, do N có tung độ dương nên $N\left(\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right), N_1(2;-3)$



+ Tứ giác BMND nội tiếp $\Rightarrow BNM = BDM = 45^0 \Rightarrow MN$ là đường phân giác trong góc $BNA \Rightarrow N_1$ là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow IN_1 \perp AB$ với $I(2;0)$ là tâm của $(C) \Rightarrow AB: y = 0$.

+ $M = MN \cap AB \Rightarrow M(1;0)$, A, B là các giao điểm của đt AB và $(C) \Rightarrow A(-1;0)$ và $B(5;0)$ hoặc $A(5;0)$ và $B(-1;0)$. Do $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ nên $A(-1;0)$ và $B(5;0)$

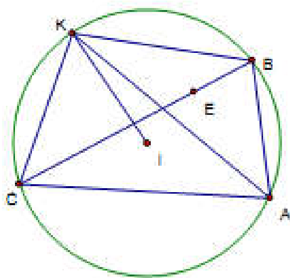
+ $AN: 2x - y + 2 = 0, MD: y = 1 \Rightarrow D = AN \cap MD \Rightarrow D(1;4)$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow C(5;4)$

Bài 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhận trục hoành làm đường phân giác trong của góc A, điểm $E(3;-1)$ thuộc đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm A có hoành độ âm.

(Đề thi thử THPT Phước Bình Bình Phước 2016 Lần 3)

Đáp án:



Đường tròn ngoại tiếp có tâm I(1;5)

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Do A có hoành độ âm suy ra $A(-4;0)$

Và gọi $K(6;0)$, vì AK là phân giác trong góc A nên $KB = KC$, do đó $KI \perp BC$ và $\overrightarrow{IK}(-5;5)$ là vtpt của đường thẳng BC.

$\Rightarrow BC: -5(x-3) + 5(y+1) = 0 \Leftrightarrow -x + y + 4 = 0$

Suy ra B, C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0 \\ -x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

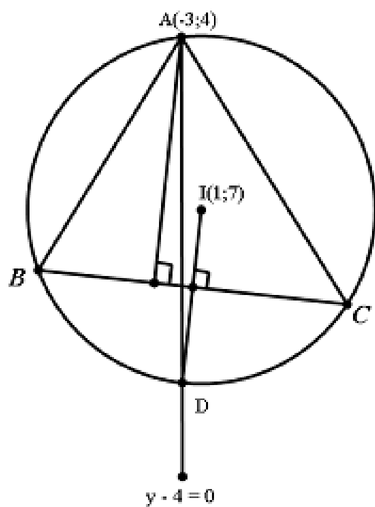
Vậy $A(-4;0), B(8;4), C(2;-2)$ hoặc $A(-4;0), C(8;4), B(2;-2)$



Bài 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(-3;4), đường phân giác trong của góc A có phương trình: $y-4=0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(1;7)$. Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích ΔABC gấp 2 lần diện tích ΔIBC.

(Đề thi thử THPT Hà Huy Tập 2016 Lần 1)

Đáp án:



Viết được phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâim I(1;7) và bk $IA=5$ là $(x-1)^2+(y-7)^2=25$

Giải hpt: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-7)^2=25\\ y-4=0\end{cases}$ để tìm $D(5;4)$

Chứng minh $ID\perp BC$ (vì ΔIBC cân tại I có ID là đường phân giác) $\Rightarrow \overrightarrow{DI}=(-4;3)$ là 1 vtpt của $(BC)\Rightarrow pt(BC):-4x+3y+c=0$ (với $(c+24)(c-8)<0(*)$)

$S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta IBC}\Rightarrow d(A,(BC))=2d(I,(BC))\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=-10\\ c=-\dfrac{58}{3}\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện (*))

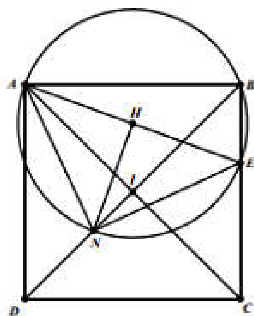
Vậy $(BC):-4x+3y-10=0$ hoặc $12x-9y+58=0$



Bài 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm E(7;3) là một điểm nằm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường chéo BD tại điểm $N(N \neq B)$. Đường thẳng AN có phương trình 7x +11y + 3 = 0 . Tìm tọa độ các đỉnhA, B, C,D của hình vuông ABCD , biết A có tung độ dương, C có tọa độ nguyên và nằm trên đường thẳng $2x - y - 23 = 0$.

(Đề thi thử THPT Hàn Thuyên Bắc Ninh 2016 Lần 1)

Đáp án:



Tứ giác ABEN nội tiếp đường tròn đường kính $AE \Rightarrow ANE = 90^0 \Rightarrow AN \perp NE$

$\Rightarrow NE: 11(x-7) - 7(y-3) = 0 \Leftrightarrow 11x - 7y - 56 = 0$

Tọa độ của N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 11x - 7y - 56 = 0 \\ 7x + 11y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$

Gọi H là trung điểm của AE, có $NBE = 45^0 \Rightarrow NHE = 90^0 \Rightarrow AN = NE$

Gọi $A\left(a; -\dfrac{7a+3}{11}\right)$. Ta có $AN^2 = NE^2 \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{49 - 14a}{22}\right)^2 = \dfrac{85}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 9(l) \\ a = -2 \end{array}\right. \Rightarrow A(-2;1)$

Gọi $C(c; 2c - 23) \Rightarrow$ trung điểm I của $AC: I\left(\dfrac{c-2}{2}; c - 11\right) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = \left(-\dfrac{c+2}{2}; 12 - c\right)$

$\overrightarrow{IN} = \left(\dfrac{9-c}{2}; \dfrac{17}{2} - c\right)$



Ta có $AIN = 90^0 \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IN} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 10 \\ c = \frac{39}{5}(l) \end{array}\right. \Rightarrow C(10;-3); I(4;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EC} = (3;-6) \Rightarrow BC: 2(x-7)+(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y-17=0$

$\overrightarrow{IN} = \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \Rightarrow BD: 3(x-4)-(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x-y-13=0$

Tọa độ điểm $B: \begin{cases} 3x-y-13=0 \\ 2x+y-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow B(6;5), D(2;-7)$

Bài 53. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(T): x^2+y^2-4x-2y=0$ và đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y=0$. Biết diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC(với I là tâm của đường tròn (T)) và điểm A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng BC.

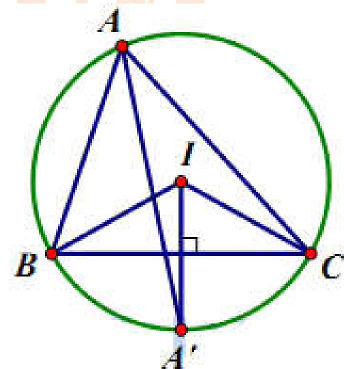
(Đề thi thử THPT Hoàng Hoa Thám 2016 Lần 1)

Đáp án: Gọi d là đường phân giác trong của góc A

Đường tròn (T) có tâm $I(2;1)$ và bán kinh $R=\sqrt{5}$

Khi đó đường thẳng d cắt đường tròn (T) tại A và A' có tọa độ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$



Điểm A có tung độ dương suy ra $A(3;3)$ và $A'(0;0)$

Vì d là phân giác trong của góc A nên $BA' = CA' \Rightarrow IA' \perp BC$

Phương trình đường thẳng BC có dạng: $BC: 2x+y+m=0$

Mặt khác ta có: $S_{ABC} = 3S_{IBC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(A,BC).BC = 3.\frac{1}{2}d(I,BC).BC \Leftrightarrow d(A,BC) = 3.d(I,BC)$

$\frac{|m+9|}{\sqrt{5}} = 3.\frac{|m+5|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |m+9| = 3.|m+5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-6 \end{array}\right.$

Với $m=-3$ khi đó $BC: 2x+y-3=0$



Tọa độ các điểm B, C là: $\left(\frac{6-\sqrt{21}}{5};\frac{3+2\sqrt{21}}{5}\right),\left(\frac{6+\sqrt{21}}{5};\frac{3-2\sqrt{21}}{5}\right)$, suy ra B, C nằm khác phía đối với đường thẳng d (thỏa).

Với $m=-6$ khi đó $BC:2x+y-6=0$

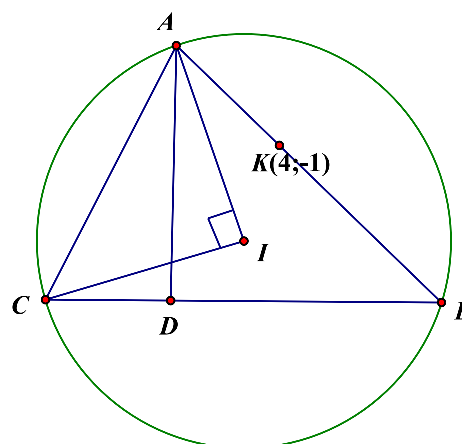
Tọa độ các điểm B, C là: $\left(\frac{12-2\sqrt{6}}{5};\frac{6+4\sqrt{6}}{5}\right),\left(\frac{12+2\sqrt{6}}{5};\frac{6-4\sqrt{6}}{5}\right)$ suy ra B, C nằm khác phía đối với đường thẳng d (thỏa).

Do đó phương trình đường thẳng BC là $2x+y-3=0$ và $2x+y-6=0$.

Bài 54. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $I(1;-2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp và $AIC=90^0$. Hình chiếu vuông góc của A trên BC là $D(-1;-1)$. Điểm $K(4;-1)$ thuộc đường thẳng AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, C biết điểm a có tung độ dương.

(Đề thi thử THPT Khoái Châu Hưng Yên 2016)

Đáp án: Do $AIC=90^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ABC=45^0 \\ ABC=135^0 \end{array}\right.$



$\Rightarrow ABD=45^0$ nên ΔADB vuông cân tại D

Do đó $DA=DB$. Lại có: $IA=IB \Rightarrow DI\perp AB$

Nên đường thẳng AB đi qua $K(4;-1)$ và vuông góc với DI có phương trình $2x-y-9=0$. Gọi $A(a;2a-9)\in AB$, do

$$DA=\sqrt{2}d(D;AB)=2\sqrt{10}\Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+(2a-8)^2}=2\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow a^2-6a+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} A(1;-7) & (loai) \\ A(5;1) & (t/m) \end{array}\right.$$



Phương trình DB đi qua D có VTPT $\overrightarrow{AD}: 3x+y+4=0$

$C \in DB \Rightarrow C(c;-3c-4)$. Do ΔIAC vuông cân tại I nên

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}=0 \Leftrightarrow 4(c-1)-3(3c+2)=0 \Leftrightarrow c=-2 \Rightarrow C(-2;2)$

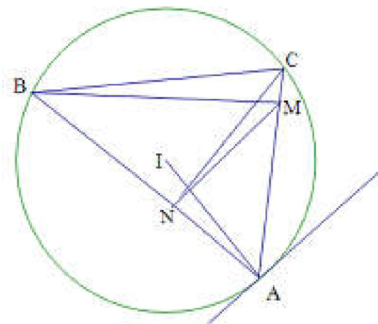
Bài 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to 1^-}=-\infty$. Chân các đường vuông góc hạ từ B và C xuống AC, AB thứ tự là $(-\infty;1)(1;+\infty)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết đỉnh A có tung độ âm.

(Đề thi thử THPT Kinh Môn Hải Dương 2016 Lần 1)

Đáp án:

Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (C) tại A. Ta có tứ giác BCMN nội tiếp nên góc $ABC=AMN$ (cùng bù với góc NMC).

Lại có $ABC=MAt=\frac{1}{2}sdAC$, suy ra $MAt=AMN$. Mà chúng ở vị trí so le trong nên $MN//At$; hay IA vuông góc với MN (I là tâm đường tròn (C)).



Ta có: $\overrightarrow{MN}(3;0), I(2;3) \Rightarrow AI: x=2$. A là giao của IA và (C) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x=2 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=8 \\ x=2; y=-2 \end{array}\right.$. A có tung độ âm nên $A(2;-2)$

- Pt $AN: x-y-4=0$. B là giao điểm khác A) của AN và (C) suy ra tọa độ của $B(7;3)$

- Pt AM: $2x+y-2=0$. C là giao điểm (khác A) của AM và (C) suy ra tọa độ của $C(-2;6)$

Bài 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A(-3 ; 4), đường phân giác trong của góc A có phương trình $x+y-1=0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(1;7). Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích ΔABC gấp 4 lần diện tích ΔIBC.

(Đề thi thử THPT Lạc Long Quân Khánh Hòa 2016 Lần 1)

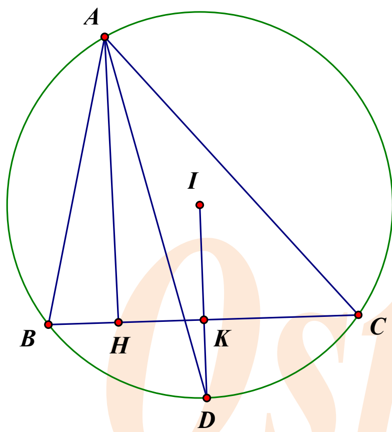


Đáp án: + Ta có $IA=5$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC có dạng

$(C):(x-1)^2+(y-7)^2=25$

+ Gọi D là giao điểm thứ hai của đường phân giác trong góc A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tọa độ của D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ (x-1)^2+(y-7)^2=25 \end{cases} \Rightarrow D(-2;3)$$



+ Vì AD là đường phân giác trong góc A nên D là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Do đó $ID\perp BC$ hay đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{DI}=(3;4)$ làm vtpt.

+ Phương trình cạnh BC có dạng $3x+4y+c=0$

+ Do $S_{\Delta ABC}=4S_{\Delta IBC}$ nên $AH=4IK$

+ Mà $AH=d_{(A;BC)}=\frac{|7+c|}{5}$ và $IK=d_{(I,BC)}=\frac{|31+c|}{5}$ nên $|7+c|=4|31+c|\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=-\frac{114}{3} \\ c=-\frac{131}{5} \end{array}\right.$

Vậy phương trình cạnh BC là: $9x+12y-144=0$ hoặc $15x+12y-131=0$

Bài 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $x^2+y^2-6x-2y+5=0$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn



đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC, biết đường thẳng MN có phương trình: $20x-10y-9=0$ và điểm H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

(Đề thi thử THPT Lí Thái Tổ Bắc Ninh 2016 Lần 1)

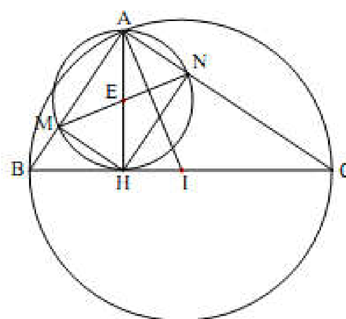
Đáp án: (T) có tâm $I(3;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Do $IA=IC\Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{ICA}\ (1)$

Đường tròn đường kính AH cắt BC tại $M\Rightarrow MH\perp AB\Rightarrow MH//AC$ (cùng vuông góc AC)

$\Rightarrow \widehat{MHB}=\widehat{ICA}\ (2)$

Ta có: $\widehat{ANM}=\widehat{AHM}$ (chắn cung AM) (3)



Từ (1), (2), (3) ta có:

$\widehat{IAC}+\widehat{ANM}=\widehat{ICA}+\widehat{AHM}=\widehat{MHB}+\widehat{AHM}=90^0$

Suy ra: AI vuông góc MN

⇒ phương trình đường thẳng IA là: $x+2y-5=0$

Giả sử $A(5-2a;a)\in IA$

Mà $A\in(T)\Leftrightarrow(5-2a)^2+a^2-6(5-2a)-2a+4=0\Leftrightarrow 5a^2-10a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.$

Với $a=2\Rightarrow A(1;2)$ (thỏa mãn vì A, I khác phía MN)

Với $a=0\Rightarrow A(5;0)$ (loại vì A, I cùng phía MN)

Gọi E là tâm đường tròn đường kính AH $\Rightarrow E\in M\Rightarrow E\left(t;2t-\frac{9}{10}\right)$

Do E là trung điểm AH $\Rightarrow H\left(2t-1;4t-\frac{48}{10}\right)$

$\Rightarrow \overline{AH}=\left(2t-2;4t-\frac{58}{10}\right),\overline{IH}=\left(2t-4;4t-\frac{48}{10}\right)$

Vì $AH\perp HI\Rightarrow \overline{AH}.\overline{IH}=\overline{0}\Leftrightarrow 20t^2-\frac{272}{5}t+\frac{896}{25}=0$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{8}{5} \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right) \quad (\text{thoa man}) \\ t=\frac{28}{5} \Rightarrow H\left(\frac{31}{25};\frac{17}{25}\right) \quad (\text{loai}) \end{array}\right.$$

Với $t=\frac{8}{5} \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right) \quad (\text{thoa man})$

Ta có: $\overline{AH}=\left(\frac{6}{5};\frac{3}{5}\right) \Rightarrow BC$ nhận $\overline{n}=(2;1)$ là VTPT

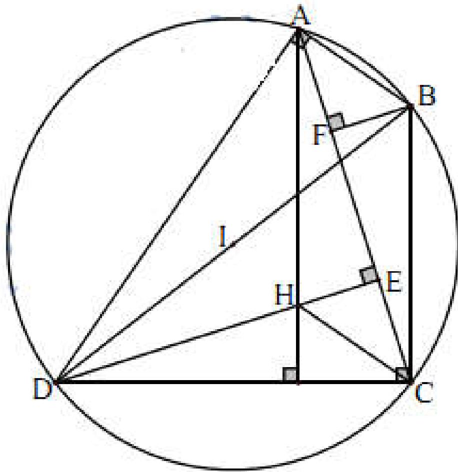
$\Rightarrow$ Phương trình BC là: $2x+y-7=0$

Bài 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD. Đỉnh B thuộc đường thẳng Δ có phương trình $x+y-5=0$. Các điểm E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và B lên AC. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết $CE=\sqrt{5}$ và $A(4;3), C(0;-5)$.

(Đề thi thử THPT Minh Châu Hưng Yên 2016 Lần 3)

Đáp án:





Gọi H là trực tâm tam giác ACD, suy ra $CH \perp AD$ nên $CH \parallel AB$ (1)

Mặt khác AHààBC (cùng vuông góc với CD) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCH là hình bình hành nên CH=AB (3)

Ta có: $HCE = BAF$ (so le trong) (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\Delta HCE = \Delta BAF$ (cạnh huyền và góc nhọn). Vậy CE = AF.

Vì $DAB = DCB = 90^0$ nên E, F nằm trong đoạn AC.

Phương trình đường thẳng AC: $2x - y - 5 = 0$

Vì $F \in AC$ nên $F(a; 2a-5)$. Vì $AF = CE = \sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = 3 \end{array}\right.$

Với $a = 5 \Rightarrow F(5;5)$ (không thỏa mãn vì F nằm ngoài đoạn AC)

Với $a = 3 \Rightarrow F(3;1)$ (Thỏa mãn). Vì $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC} \Rightarrow E(1;-3)$

BF qua F và nhận $\overrightarrow{EF}(2;4)$ làm một véc tơ pháp tuyến, do đó BF có phương trình: $x + 2y - 5 = 0$. B là giao điểm của Δ và BF nên tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5;0)$$

Đường thẳng DE qua E và nhận $\overrightarrow{EF}(2;4)$ làm một véctơ pháp tuyến, DE có phương trình: $x + 2y + 5 = 0$.



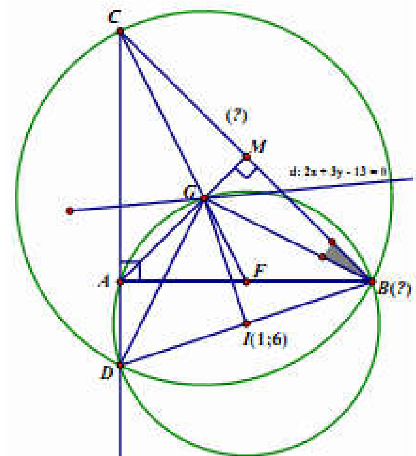
Đường thẳng DA qua A và nhận $\overrightarrow{AB}(1;-3)$ làm một véc tơ pháp tuyến, DA có phương trình: $x-3y+5=0$

D là giao điểm của DA và DE nên tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x+2y+5=0 \\ x-3y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(-5;0)$. Kết luận: $B(5;0), D(-5;0)$

Bài 59. ***(Đề thi thử THPT Phù Cừ 2016 Lần 1)*** Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia AC sao cho $GD=GC$. Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: 2x+3y-13=0$ và tam giác BDG nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-12y+27=0$. Tìm tọa độ điểm B và viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm B có hoành độ âm và toạ độ điểm G là số nguyên.

Đáp án: Tam giác ABC vuông cân tại A có G là trọng tâm nên GB = GC



Mà GD = GC nên tam giác BCD nội tiếp đường tròn tâm G.

Suy ra $BGD = 2BCD = 2BCA = 90^0 \Rightarrow BG \perp GD$

Hay tam giác BDG vuông cân tại G

Đường tròn (C) tâm $I(1;6)$ bán kính $R=\sqrt{10}$ ngoại tiếp tam giác BDG nên I là trung điểm BD.

Do đó $IG=\sqrt{10}$ và $IG \perp BD$

Vì $G \in \text{d}: 2x+3y-13=0 \Rightarrow G\left(m;\dfrac{13-2m}{3}\right)$

Từ $IG=\sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} G(2;3) \\ G\left(-\dfrac{28}{13};\dfrac{75}{13}\right) \end{array}\right.$, do toạ độ điểm G là số nguyên nên $G(2;3)$

BD đi qua I(1;6) và $IG \perp BD$ nên phương trình $x-3y+17=0$



$B,D \in BD \cap (C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-2;5) \\ D(4;7) \end{array}\right.$ *(do hoành độ điểm B âm)*

Vậy $B(-2;5)$

Gọi M là trung điểm của BC ta có AM = MB = MC (do ABC vuông cân tại A)

Suy ra $AM \perp BC \Rightarrow GM \perp MB$ và $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}MB$

Nên $\tan GBM = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos GBM = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Gọi $\vec{n} = (a,b)$ với $(a^2 + b^2 \neq 0)$ à VTPT của BC.

Ta có VTCP của BG là $\overrightarrow{BG} = (4;-2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BG}} = (1;2)$ là VTPT của BG

Có $\cos(BG,BC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{BG}},\vec{n}\right)\right| \Leftrightarrow \cos GBM = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{BG}},\vec{n}\right)\right| \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\left|\overrightarrow{n_{BG}}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{BG}}\right|.\left|\vec{n}\right|}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|a+2b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} \Leftrightarrow 35a^2 - 40ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 7a-b=0 \end{array}\right.$

<u>**Trường hợp 1:**</u> Với $a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1;1)$ nên phương trình $BC: x + y - 3 = 0$

<u>**Trường hợp 2:**</u> Với $7a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1;7)$ nên phương trình $BC: x + 7y - 33 = 0$

Do hai điểm D và G cùng mằn về một phía đối với đường thẳng BC nên phương trình BC thoả mãn là $x + y - 3 = 0$

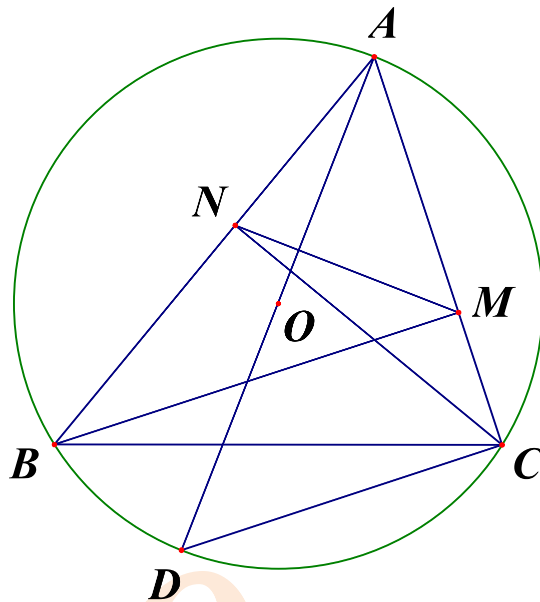
Vậy $BC: x + y - 3 = 0$ và $B(-2;5)$

Bài 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh B và C. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

(Đề thi thử THPT Sở GD & DT Quảng Ninh 2016)

Đáp án:





Chứng minh $OA \perp MN$

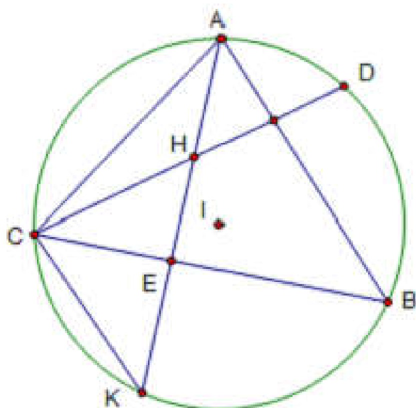
ĐS: $A(-4;3), B(-3;-4), C(5;0)$

Bài 61. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, hãy tính diện tích tam giác ABC biết rằng hai điểm H(5;5), I(5;4) lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là: $x+y-8=0$.

(Đề thi thử THPT Sông Lô 2016 Lần 1)

Đáp án:





Giả sử AH lần lượt cắt BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm E và K

DCB=BAK (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow DB = KB \Rightarrow HCE = ECK \Rightarrow \Delta HCE = \Delta KCE$ (g.c.g)

E là trung điểm của HK

Vì $AH \perp BC \Rightarrow AH : x - y = 0$

$E = BC \cap AH \Rightarrow E(4;4)$ và E là trung điểm HK nên $K(3;3)$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = IK = \sqrt{5}$

Vậy đường tròn có phương trình : $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5$

Từ đó tính được $B(3;5), C(6;2)$ hoặc $B(6;2), C(3;5)$ và $A(6;6)$

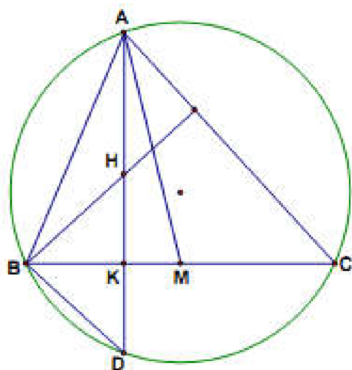
$S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A, BC).\text{BC} = \frac{1}{2}.\frac{|6+6-8|}{\sqrt{2}} 3\sqrt{2} = 6$ (đvdt)

Bài 62. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0, x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC; biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

(Đề thi thử THPT Thống Nhất Thanh Hóa 2016 Lần 1)



Đáp án: Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:



$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}}=\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của $AD:1(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x+5y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$

Tứ giác HKCE nội tiếp nên $BHK = KCE$, mà $KCE = BDA$ (nội tiếp chắn cung AB)

Suy ra $BHK = BDK$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$

Do B thuộc $BC \Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$

$\overrightarrow{HB}(t-2t;t-8);\overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=7 \end{array}\right.$$



Do $t \le 3 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow B(2;-2), C(5;1)$. Ta có:

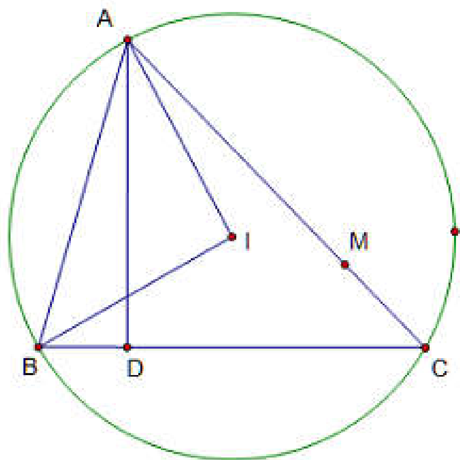
$\overrightarrow{AB} = (1;-3), \overrightarrow{AC} = (4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (3;1), \overrightarrow{n_{AC}} = (0;1)$

Suy ra $AB: 3x + y - 4 = 0; AC: y - 1 = 0$

Bài 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $\widehat{AIB} = 90^0$. Chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$. Đường thẳng AC đi qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đỉnh A có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT iSCHOOL Nha Trang Khánh Hòa 2016 Đề 2)

Đáp án:



$\widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^0 \vee \widehat{ACB} = 135^0 \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại D $\Rightarrow DI \perp AC$. Đường thẳng AC đi qua M và nhận $\overrightarrow{ID} = (1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến $\Rightarrow AC: x - 2y + 9 = 0$

DI: $2x + y + 3 = 0$. Gọi $E = DI \cap AC \Rightarrow E(-3;3)$, $AE = DE = \sqrt{20}$

$A \in AC \Rightarrow A(-9+2t;t)$ ta có: $AE^2 = 20 \Leftrightarrow 5t^2 - 30t + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow A(-7;1)(loai) \\ t = 5 \Rightarrow A(1;5) \end{array}\right.$

E là trung điểm của AC $\Rightarrow C(-7;1)$

$BC: x + 3y + 4 = 0; BI: 3x + 4y + 2 = 0$



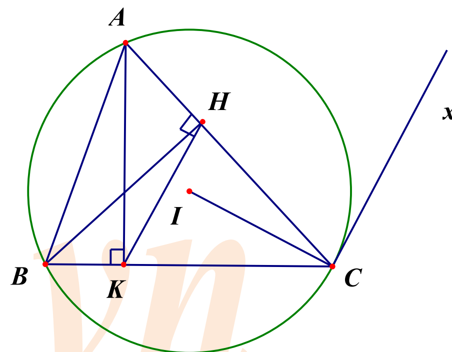
$B = BC \cap BI \Rightarrow B(2;-2)$

Vậy $A(1;5), B(2;-2), C(-7;1)$

Bài 65. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$ ngoại tiếp tam giác ABC. Các điểm $K(-1;1), H(2;5)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ các đỉnh A và B của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng C có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Tô Văn Ơn Thanh Hóa 2016 Lần 1)

Đáp án: + (C) có tâm $I(1;2)$. Gọi Cx là tiếp tuyến của (C) tại C.



Ta có $HCx = ABC = \frac{1}{2} Sd\ \text{AC} (1)$

Do $AHB = AKB = 90^0$ nên AHKB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow ABC = KHC$ (cùng bù với góc AHK) (2)

Từ (1) và (2) ta có $HCx = KHC \Rightarrow HK // Cx$

Mà $IC \perp Cx \Rightarrow IC \perp HK$

Do đó IC có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KH} = (3;4)$, IC có phương trình

$3x + 4y - 11 = 0$

Do C là giao của IC và (C) nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 3x+4y-11=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$. Do $x_C > 0$ nên $C(5;-1)$

Đường thẳng AC đi qua C và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CH} = (-3;6)$ nên AC có phương trình

$2x + y - 9 = 0$

Do A là giao của AC và (C) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x+y-9=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}; \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ (loại). Do đó $A(1;7)$

Đường thẳng BC đi qua C và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CK} = (-6;2)$ nên BC có phương trình

$x + 3y - 2 = 0$



Do B là giao của BC và (T) nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y-2=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$ (loại). Do đó $B(-4;2)$

Vậy $A(1;7);B(-4;2);C(5;-1)$

Bài 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho hình vuông ABCD, M là trung điểm của đoạn AD, N thuộc đoạn CD sao cho $NC=3ND$. Đường tròn tâm N qua M cắt AC tại $J(3;1), J \neq I = AC \cap BD$, đường thẳng đi qua M, N có phương trình $x+y+1=0$. Tìm tọa độ điểm B.

(Đề thi thử THPT Việt Trì Phú Thọ 2016 Lần 2)

Đáp án: MN cắt đường tròn tâm N tại K .ta chứng mính được tứ giác MIJK nội tiếp

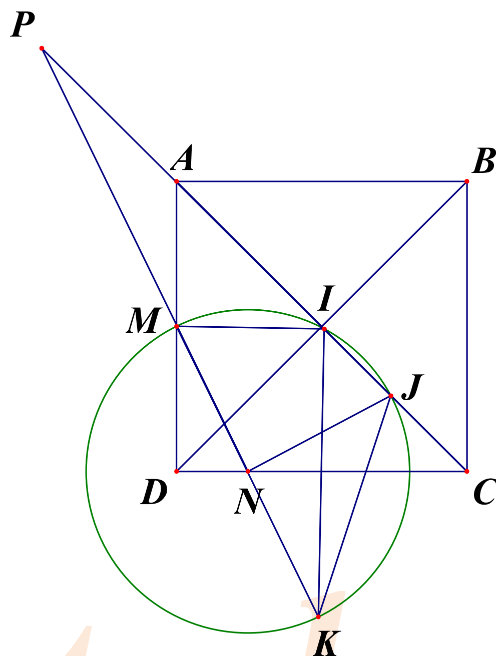
$\widehat{NKJ}=\widehat{AIM}=45^0 \Rightarrow \widehat{JNK}=90^0$

NJ vuông góc với (MN) nên có phương trình : $x-y-2=0 \Rightarrow N\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Tam giác JMN vuông cân nên $MJ=\sqrt{2}PN \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;-4) \\ M(-2;1) \end{array}\right.$

Với $M(-2;1)$ gọi $P=MN \cap JA$ ta có $\overrightarrow{NP}=3\overrightarrow{NM} \Rightarrow P(-7;6)$





$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PJ}$ tìm được $A(-3;4)$, vì A là trung điểm của IP nên $I(1;2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow B(3;6)$

Tương tự với $M(3;-4)$ tìm được $A(6;-5), I(4;-1)$ và $B(8;1)$

Vậy tọa độ điểm $B(3;6)$ hoặc $B(8;1)$

Bài 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD.Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD.Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x - 4y - 17 = 0$; đường thẳng BC đi qua điểm E(7;0) và điểm M có tung độ âm.

(Đề thi thử THPT Xuân Trường Nam Định 2016 Lần 1)

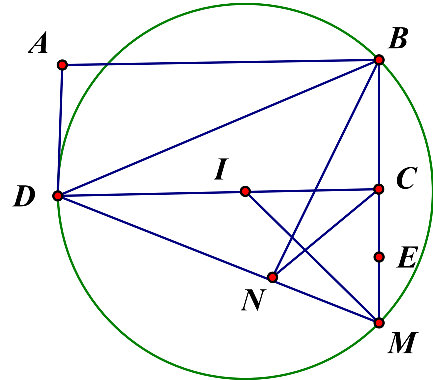
Đáp án: +(T) có tâm $I(4;1); R = 5$

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và N,C là chân các đường cao nên chứng minh được $IM \perp CN$



+ Lập ptđt IM qua I và $IM \perp CN : 4(x-4)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-19=0$

+ M là giao điểm (T) với IM: $\left[\begin{array}{l} M(7;-3) \\ M(1;5) \quad (loai) \end{array}\right.$



+ Đường thẳng BC qua M,E có pt : x=7

+ C là giao điểm BC và NC => C(7 ;1)

+ B đối xứng M qua C => B(7 ;5)

+ Đường thẳng DC qua C và vuông góc BC : y=1

D là giao điểm (T) và DC : $\left[\begin{array}{l} D(9;1) \\ D(-1;1) \end{array}\right.$

Vì B,D nằm cùng phía với CN nên D(-1 ;1)

+ Do $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow A(-1;5)$

Bài 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{16}\right)$, tâm đường tròn nội tiếp là $J(1;0)$. Đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ và đường phân giác ngoài góc $\widehat{BAC}$ cắt nhau tại $K(2;-8)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Yên Lạc Vĩnh Phúc 2016 Lần 2)

Đáp án:

Gọi giao điểm của AK và đường tròn (I) là H. Xét tam giác BHJ có

$\widehat{HJB}=\widehat{JAB}+\widehat{JBA}$ (góc ngoài tam giác JAB)

$=\widehat{JAC}+\widehat{JBC}$ (vì AJ, BJ là các đường phân giác)

$=\widehat{CBH}+\widehat{JBC}$ (nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CH}$ của đường tròn (I))

$=\widehat{HBJ}$

Suy ra tam giác HJB cân tại H, vậy $HJ=HB$ và $\widehat{HJB}=\widehat{HBJ}$ (1)



Lại có BJ, BK thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài góc $\widehat{ABC}$ nên tam giác BKJ vuông tại B.

Suy ra $\widehat{HJB}+\widehat{HKB}=90^0=\widehat{HBJ}+\widehat{HBK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HKB}=\widehat{HBK}$ hay tam giác HBK cân tại H, do đó $HJ=HB=HK$, vậy H là trung điểm JK, hay $H\left(\frac{3}{2};-4\right)$. Tương tự $HJ=HC=HK$

Ta có $\overline{IH}\left(0;-\frac{65}{16}\right);\overline{HJ}\left(-\frac{1}{2};4\right)$

B, C cùng thuộc các đường tròn (I;IH) và (H; HJ) nên tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{16}\right)^2=\left(\frac{65}{16}\right)^2\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+4)^2=\frac{1}{4}+16\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5;y=-2\\x=-2;y=-2\end{array}\right.\Rightarrow B(5;-2),C(-2;-2)$$

AH đi qua J và K nên phương trình đường thẳng AH là: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{-8-0}\Leftrightarrow 8x+y-8=0$ Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với AH, d có véc tơ pháp tuyến $\overline{n}=-2\overline{HJ}=(1;-8)$, phương trình đường thẳng d là: $x-8y-1=0$. Gọi M là giao điểm của d và AH, tọa độ M là nghiệm hệ:

$$\begin{cases}x-8y-1=0\\8x+y-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow M(1;0)\equiv J$$. M là trung điểm AH nên $A\left(\frac{1}{2};4\right)$

Kết luận $A\left(\frac{1}{2};4\right),B(5;-2),C(-2;-2)$

Bài 69. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $C(-1;-2)$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi M, N, H lần lượt các tiếp điểm của (I) với cạnh AB, AC, BC. Gọi $K(-1;-4)$ là giao điểm của BI với MN. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC, biết $H(2;1)$

(Đề thi thử THPT Anh Sơn 2 Nghệ An 2016 Lần 2)

Đáp án: Ta có: $KIC=IBC+ICB=\frac{ABC}{2}+\frac{ACB}{2}=90^0-\frac{BAC}{2}(1)$



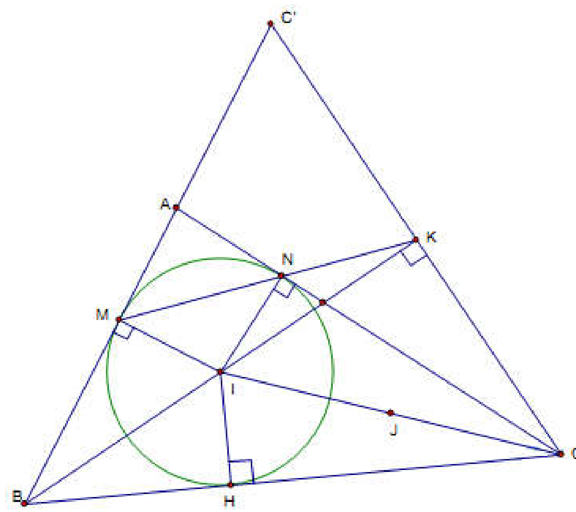
Ta có $KNC = ANM = AMN = 90^0 - \frac{BAC}{2}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $KIC = KNC$ nên tứ giác KNIC nội tiếp đường tròn đường kính IC.

Mặt khác tam giác IHC nội tiếp trong đường tròn đường kính IC.

Vậy 5 điểm K, N, I, H, C nằm trên đường tròn đường kính IC.

Gọi J là trung điểm của IC nên J là tâm đường tròn đi qua 5 điểm trên.



Giả sử J(x;y) khi đó

$$JC = JK = JH \Rightarrow \begin{cases} IC = JK \\ JC = JH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (-4-y)^2 = (-1-x)^2 + (-2-y)^2 \\ (-1-x)^2 + (-4-y)^2 = (2-x)^2 + (1-y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow J(3;-3)$$

Vì J là trung điểm của IC nên $I(7;-4)$. Từ đó suy ra BI có phương trình $y + 4 = 0$

BC đi qua H và C nên có phương trình $x - y - 1 = 0$

Do đó, B(x;y) là nghiệm của hệ $\begin{cases} y + 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-4)$

Vì $INC = 1v \Rightarrow NKC = 1v$. Từ đó gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường thẳng BI. Khi đó K là trung điểm của CC' nên $C'(-1;-6)$



Đường thẳng AB qua B và C’ có phương trình là: $x+y+7=0$

Giả sử AC có VTPT $\vec{n}=(a;b),(a^2+b^2\neq 0)$

Khi đó AC có phương trình $a(x+1)+b(y+2)=0\Leftrightarrow ax+by+a+2b=0$

Ta có: $d(I,AC)=IH\Leftrightarrow \dfrac{|7a-4b+a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{|8a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\sqrt{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=-1\\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{23}{7}\end{array}\right.$

+ $\dfrac{a}{b}=-1$ chọn $a=1;b=-1$ nên AC có phương trình $x-y-1=0$ (trùng BC) (loại)

+ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{23}{7}$ chọn $a=23;b=7$ nên AC có phương trình $23x+7y+37=0$

+ Khi đó A (x; y) là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y+7=0\\ 23x+7y+37=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}\\ y=-\dfrac{31}{4}\end{cases}$

Vậy $A\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{31}{4}\right)$

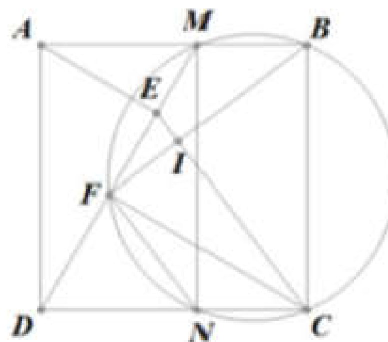
Câu 70 : Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $C(-4;-3)$ và M là một điểm nằm trên cạnh AB (M không trùng với A và B). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, C lên DM và $I(2;3)$ là giao điểm của CE và BF. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng d có phương trình $x-2y+10=0$

(Đề thi thử THPT Yên Thế 2016 Lần 3)

Đáp án: +) Qua F kẻ FN song song với EC, cắt DC tại N. Khi đó ta có:

$\dfrac{DN}{DC}=\dfrac{DF}{DE}(1)$

$\Delta DFC\sim\Delta MEA\Rightarrow\dfrac{DF}{DC}=\dfrac{ME}{MA}\ (2)$





$$\Delta DEA \sim \Delta AEM \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{MA}{AE} \ (3)$$

$$\overset{(3),(2)}{\Rightarrow} \frac{DF}{DE} = \frac{ME}{AE} = \frac{AM}{AD} = \frac{AM}{AB} \quad (4)$$

$$\overset{(1),(4)}{\Rightarrow} \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} \Rightarrow DN = MA$$

Khi đó MBCN là hcn nên 5 điểm F, M, B, C, N cùng....

$$\begin{cases} BFN = 90^0 \\ FN / / EC \end{cases} \Rightarrow EC \perp BF$$

Giải hệ $\begin{cases} B \in d \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;5)$

Phương trình $BC: 2x - y + 5 = 0$

Tìm A, D

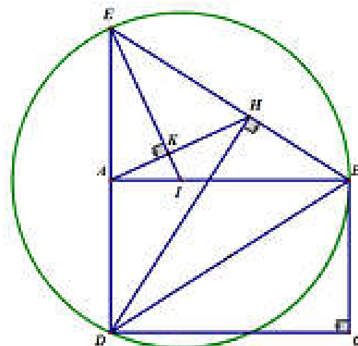
Kết luận: $A(8;1), B(0;5), \mathrm{D}(4;-7)$

Bài 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của D qua A và H là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE có phương trình $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$, đường thẳng AH có phương trình $3x - 4y - 17 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đ cho, biết đường thẳng AD đi qua $M(7;2)$ và E có tung độ âm.

(Đề thi thử THPT Sở GD & DT Bà Rịa Vũng Tàu 2016 Lần 1)

Đáp án:

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. Suy ra (C) có tâm $I(4;1)$, bán kính R = 5.



Vì tam giác BDE cân nên I thuộc AB.

Do tam giác IBE cân tại I nên $IBE = IEB$

Do tam giác AHE cân tại A nên $AHE = A\mathrm{EH}$



Mà $IBE + AEH = 90^0$ nên $IEB + AHE = 90^0 \Rightarrow \Delta HKE$ vuông tại K.

Đường thẳng IE qua I và vuông góc với AH nên có phương trình: $4x+3y-19=0$

Tọa độ điểm E thỏa mãn $\begin{cases} 4x+3y-19=0 \\ (x-4)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} E(1;5) & (l) \\ E(7;-3) & (tm) \end{array}\right.$

Đường thẳng AD đi qua M và E có phương trình: $x-7=0$

Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x-7=0 \\ 3x-4y-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(7;1)$

D đối xứng với E qua A nên có tọa độ $D(7;5)$

Đường thẳng AB qua A và vuông góc với AD nên có phương trình: $y-1=0$

Tọa độ điểm B thỏa m n hệ phương trình: $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-4)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(9;1) \\ B(-1;1) \end{array}\right.$

Với $B(-1;1)$, do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow C(-1;5)$

Với $B(9;1)$ do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow C(9;5)$

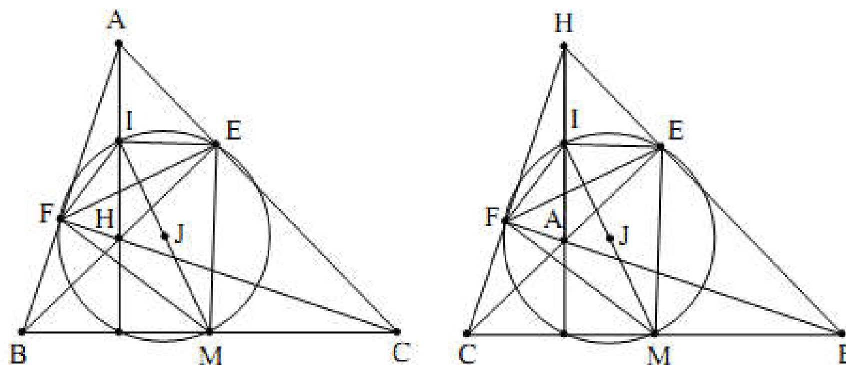
Vậy $A(7;1); B(-1;1); C(1;5); D(7;5)$ hoặc $A(7;1); B(9;1); C(9;5); D(7;5)$

Bài 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, phương trình đường thẳng AH là $3x-y+3=0$, trung điểm của cạnh BC là M(3 ; 0). Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C đến AC và AB, phương trình đường thẳng EF là $x-3y+7=0$. Tìm tọa độ điểm A, biết A có hoành độ dương.

(Đề thi thử THPT Sở GD & DT Quảng Nam 2016)

Đáp án:





Gọi I trung điểm AH. Tứ giác AEHF nội tiếp và bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn nên $IM \perp EF$ (đoạn nối tâm vuông góc với dây chung).

Ta có: $IEF = ABE$ (cùng phụ góc A hoặc cùng phụ góc EHF) và $ABE = \frac{1}{2}EMF = IME$

$\Rightarrow MEI = 90^0 \Rightarrow MFI = MEI = 90^0$

Do đó tứ giác MEIF nội tiếp đường tròn đường kính IM, tâm là trung điểm J của IM.

(Đường tròn (J) là đường tròn Euler)

Đường thẳng IM qua M và vuông góc EF nên có phương trình: $3x + y - 9 = 0$

I là giao điểm của AH và IM nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + 3 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1;6)$$

Đường tròn đường kính IM có tâm $J(2;3)$ và bán kính $r = IM = \sqrt{10}$ nên có phương trình: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 7 \\ (y-3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow E(5;4) \text{ hoặc } E(-1;2)$$

Vì $A \in AH$ nên $A(a;3a+3)$

Ta có: $IA = IE \Leftrightarrow IA^2 = IE^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (3a-3)^2 = 20 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}$

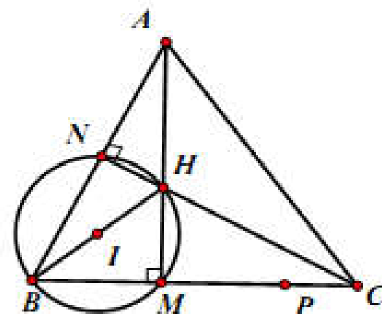


Vì A có hoành độ dương nên $A\left(1+\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$

Bài 73. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$ trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$.

(Đề thi thử THPT Sở GD & DT Quảng Ngãi 2016 Đề số 1 Lần 1)

Đáp án: Ta thấy tứ giác BMHN nội tiếp



Suy ra I là trung điểm của BH; $B\in d \Rightarrow B(2-2t;t)$

Suy ra $H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP}=(2t-1;-t-2)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP}=0 \Leftrightarrow (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2)=0$

$\Leftrightarrow 5t^2+10t+5=0 \Leftrightarrow t=-1$

Suy ra $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH}=(1;-3)$, đường thẳng

$BC: x-3y-7=0$

Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Tìm được tọa độ $C(-5;-4)$

KL...

Bài 74. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I, điểm $M(2;-1)$ là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của B lên AI là $D\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$. Biết rằng AC có phương trình $x+y-5=0$, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Đề thi thử THPT Nguyễn Văn Trỗi 2016 Lần 1)

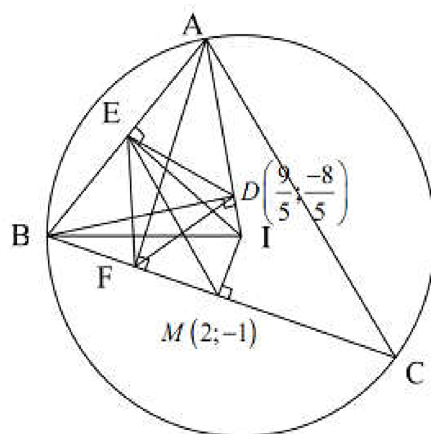
Đáp án:

Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên BC, E là trung điểm AB. Ta có tứ giác BFDA nội tiếp đường tròn đường kính AB và ngủ giác BEDIM nội tiếp đường tròn đường kính BI

Suy ra $\angle DEM = \angle DBM = \angle DBF = \frac{1}{2}\angle DEF$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

Nên EM là phân giác của $\angle DEF$, lại có $EF = DE = \frac{1}{2}AB$ nên ME là đường trung trực của DF. Đường thẳng ME qua M và song song với AC nên có phương trình $x + y - 1 = 0$, F đối xứng với D qua EM nên $F\left(\frac{13}{5};\frac{-6}{5}\right), \overrightarrow{MF}\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$ nên véc tơ pháp tuyến của BC là $\vec{n}(1;-3)$. Suy ra phương trình BC là $x - 3y - 5 = 0$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ sau:

$\begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$. M là trung điểm BC suy ra $B(-1;-2)$



AF qua F và vuông góc với BC nên có phương trình $3x + y - \frac{33}{5} = 0$ suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 3x + y - \frac{33}{5} = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;4)$.

Bài 75. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại C. Các điểm M, N lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C của tam giác ABC. Trên tia đối của tia AM lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Biết tam giác ABC có diện tích bằng 8, đường thẳng CN có phương trình $y - 1 = 0$, điểm $E(-1;7)$, điểm C có hoành độ dương và điểm A có tọa độ là các số nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Đề thi thử THPT Sở GD & DT Hà Tĩnh 2016)

Đáp án: Gọi D là điểm đối xứng của C qua N.

Khi đó, tứ giác ACBD là hình thoi nên:

$AD \perp AE; AD = AE$

Do đó: $AD = AE = AC$



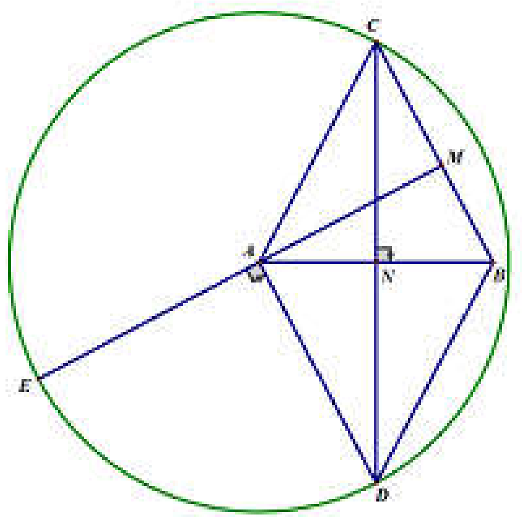
A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Do $DAE = 90^0 \Rightarrow DCE = 45^0$ suy ra góc giữa hai đường thẳng EC cà CD bằng 45^0.

Gọi $\vec{n}(a;b)$ là VTPT của đường thẳng EC $\left(a^2+b^2 \neq 0\right)$

Do góc giữa EC và NC bằng 45^0 nên

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$$



Với $a=-b$, chọn $\vec{n}(1;-1)$, ta có phương trình đường thẳng EC là $x-y+8=0$

Do C là giao điểm của CN và EC nên $C(-7;1) \rightarrow$ loại

Với $a=b$, ta chọn $\vec{n}(1;1)$, ta có phương trình đường thẳng EC là $x+y-6=0$

Do C là giao điểm của CN và EC nên $C(5;1)$

Gọi d là trung trực đoạn EC, nên d có phương trình: $x-y+2=0$

Do A thuộc d nên tọa độ điểm $A(t;t+2)$ với t nguyên.

Vì $AN \perp CN$ nên phương trình AN có dạng: $x-t=0$

Ta có: $AN = d_{(A,CN)} = |t+1|; CN = d_{(C,AN)} = |t-5|$

Nên $S_{ABC} = AN.CN = |t+1|.|t-5|$

Theo giả thiết, ta có: $S_{ABC} = AN.CN = |t+1|.|t-5| = 8$

Kết hợp với điều kiện t nguyên, ta có được $t=1; t=3$

Với $t=1$, ta được $A(1;3); B(1;-1)$

Với $t=3$, ta được $A(3;5); B(3;-3)$

Vậy, bài toàn có hai nghiệm hình là: $A(1;3); B(1;-1); C(5;1)$ và $A(3;5); B(3;-3); C(5;1)$

Chú ý:



- Hình vẽ trên áp dụng cho tam giác ABC nhọn, kết quả vẫn đúng khi tam giác ABC vuông hoặc tù. Học sinh cần nói điều này trong bài làm.

- Học sinh có thể thử lại $ECD = 45^0$ (hoặc không), nếu không cũng không bị trừ điểm ý này

Bài 76. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC không cân có phương trình cạnh $AC: y-8=0$. Đường phân giác ngoài góc B cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D, gọi $E\left(\frac{1}{5};-\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu của D lên AB. Xác định tọa độ đỉnh A và C biết phương trình $BD: x+3y-3=0$.

(Đề thi thử THPT Website sienghoc.com Lần 2)

Đáp án: Gọi M là trung điểm AC.

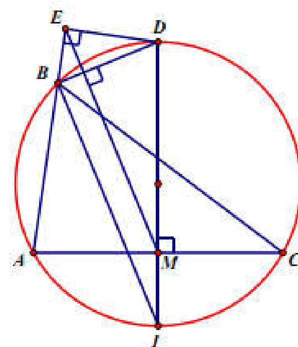
Cm $DM \perp AC, EM \perp BD$

Viết phương trình $EM \Rightarrow M(3;8)$

Viết phương trình $DM \Rightarrow D(3;0)$

Viết phương trình $AB \Rightarrow B(0;1)$

$\Rightarrow A(-1;8) \Rightarrow C(7;8)$



Bài 77. Trong mặt phẳng Oxy, cho cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Phân giác trong góc A có phương trình $3x+y-1=0$, đường cao kẻ từ đỉnh A có phương trình $x+1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC biết I thuộc đường thẳng $d: x-2y-2=0$ và $BC=8$.

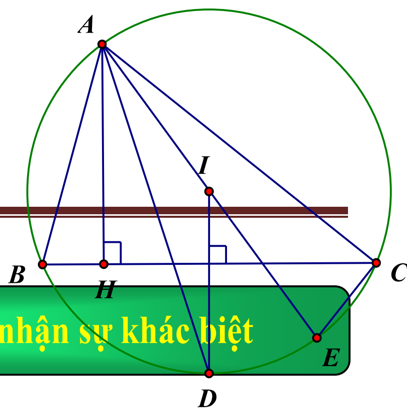
(Đề thi thử THPT Offine Thầy Nguyễn Đại Dương sienghoc.com Lần 2)

Đáp án: Tọa độ $A(-1;4)$

Chứng minh : AD là phân giác trong $\angle HAI$

Phương trình AI: $4x+3y-8=0 \Rightarrow I(2;0)$

Gọi Pt BC: $y+m=0$





Ta có: $d_{(I,BC)}=\sqrt{R^2-\dfrac{BC^2}{4}}=3\Leftrightarrow\dfrac{|m|}{\sqrt{1^2+0^2}}=3\Leftrightarrow m=\pm3$

Phương trình BC: $y\pm3=0$

Gọi D là giao điểm của phân giác trong góc A và đường tròn (I).

Cách 1: Gọi $E=AI\cap(I)\Rightarrow\angle ABH=\angle AEC\Rightarrow\angle BAH=\angle CAE$

Mà $\angle BAD=\angle BAC\Rightarrow\angle HAD=\angle DAE\Rightarrow AD$ là phân giác $\angle HAI$

Cách 2: ta có $ID\perp BC\Rightarrow AH//ID\Rightarrow\angle HAD=\angle ADI$

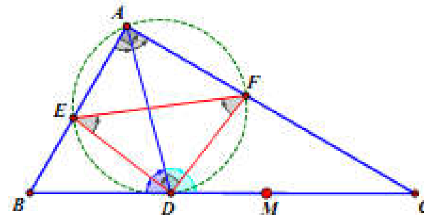
Mà $\angle ADI=\angle DAI\Rightarrow\angle HAD=\angle DAI\Rightarrow AD$ là phân giác $\angle HAI$

Bài 78. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, D là chân đường phân giác trong góc A. Gọi E là giao điểm phân giác trong góc $\angle ADB$ và cạnh AB, F là giao điểm phân giác trong góc $\angle ADC$ và cạnh AC. Xác định tọa điểm A biết $E(0;1),F(1;4)$ và điểm $M(5;6)$ nằm trên cạnh BC.

(Đề thi thử THPT Offine Thầy Nguyễn Đại Dương sienghoc.com Lần 4)

Đáp án: Chứng minh tam giác EDF vuông cân tại D.

Tọa độ $\left[\begin{array}{l}D(2;2)\\D(-1;3)\end{array}\right.$ loại $D(-1;3)$ khác phía M so với EF.



Pt DF: $2x+y-6=0$. Gọi M' đối xứng với M qua DF thì $M'\in AD$. Tọa độ $M'(-3;2)$. Pt $AD:y-2=0$.

Phương trình đường tròn đường kính EF: $(C):\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$

Tọa độ $A=AD\cap(C)\Rightarrow A(-1;2)$

Chứng minh: $\angle EDF=\angle ADE+\angle ADE=\dfrac{1}{2}\angle ADB+\dfrac{1}{2}\angle ADC=90^0$

Tứ giác AEDF nội tiếp $\Rightarrow\angle FED=\angle FAD=45^0\Rightarrow EDF$ vuông cân tại D.



Bài 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có góc $\angle BAD$ tù, I là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi $E(-5;-2), F\left(\frac{11}{5};\frac{8}{5}\right)$ và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh CD, BC, BD. Tìm tọa độ điểm A biết rằng đường thẳng BD có phương trình $3x-5y+11=0$

(Đề thi thử THPT Group Thầy Nguyễn Tiến Chinh Lần 1)

Đáp án: Ta có $I \in 3x-5y+11=0 \Rightarrow I(-2+5t;1+3t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IE} = 3+5t;3t+3 \\ \overrightarrow{IF} = \left(5t-\frac{21}{5};3t-\frac{3}{5}\right) \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Ta có tứ giác AECF nội tiếp (do $\angle AEC + \angle AFC = 180^0$ suy ra)

$$IF^2 = IE^2 \Rightarrow 3+5t^2+3t+3^2 = \left(5t-\frac{21}{5}\right)^2 + \left(3t-\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow t=0 \Rightarrow I(-2;1)$$

Gọi phương trình EIF có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$$\begin{cases} I \in EIF \\ E \in EIF \\ F \in EIF \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+4a-2b+c=0 \\ 29+10a+4b+c=0 \\ \frac{37}{5}-\frac{22}{5}a-\frac{16}{5}a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-19 \end{cases} \Rightarrow EFI: (x-1)^2+(y+5)^2=45$$

Chứng minh tứ giác EHIF nội tiếp suy ra $E;I = EIF \cap BD$

Nên thỏa $\begin{cases} (x-1)^2+(y-5)^2=45 \\ 3x-5y+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5y-11}{3}-1\right)^2+(y+5)^2=45 \\ x=\frac{5y-11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{8}{17}; x=-\frac{49}{17} \\ y=1; x=-2 \end{array}\right.$

Do $I(-2;1)$ nên ta nhận $H\left(-\frac{49}{17};\frac{8}{17}\right)$

Khi đó, đường thẳng AH qua H và vuông góc $BD \Rightarrow AH: 5x+3y+13=0$

Ta có A thỏa mãn hệ $\begin{cases} 5x+3y+13=0 \\ (x+2)^2+(y-1)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5; y=4 \\ x=-\frac{13}{17}; y=-\frac{52}{17} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(5;-4) \\ A\left(-\frac{13}{17};-\frac{52}{17}\right) \end{array}\right.$

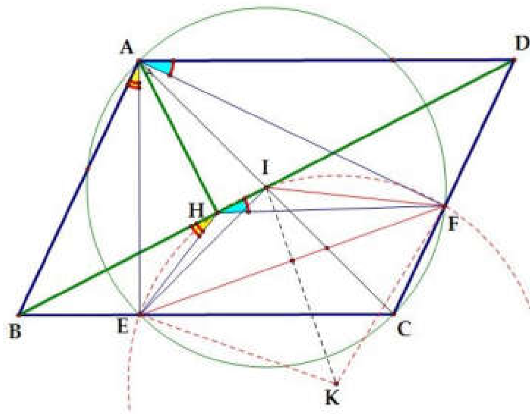


Đặt $g(x;y)=3x-5y+11$ khi đó $\begin{cases} g_{A1}(-5;4)=-24 \\ g_E(-5;-2)=6 \\ g_{A2}(-5;4)=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{A1}(-5;4).g_E(-5;-2)<0 \\ g_{A2}(-5;4).g_E(-5;-2)>0 \end{cases}$

Nhận xét A, E trái phía so với đường BD nên ta nhận $A(-5;4)$

Cách chứng minh tứ giác EHIF nội tiếp

* Theo thuần túy hình học:



Ta có: $\begin{cases} \angle BAE = \angle BHE \text{ tu giac } AHEB \text{ noi tiep do } \angle AHB + \angle ABE = 90^0 \\ \angle FAD = \angle DHF \text{ tu giac } AHFD \text{ noi tiep do } \angle AHD + \angle AFD = 90^0 \\ \angle EAF = \angle ABE \text{ do cung bu voi } \angle BCD, AECF \text{ noi tiep}, AB//CD \end{cases}$

Suy ra $\angle EHF = 180^0 - \angle BHE + \angle DHF = 180^0 - \angle BAE + \angle FAD$

Mà $\begin{cases} \angle FAD + \angle ADF = 90^0 \\ \angle BAE + \angle ABE = 90^0 \\ \angle ABE = \angle ADF \;\; ABCD \text{ la hinh binh hanh} \end{cases} \Rightarrow 2\angle ABE = 180^0 - \angle BAE + \angle FAD$

Suy ra $\angle EHF = 2\angle ABE = 2\angle EAF = \angle EIF \Rightarrow \angle EHF = \angle EIF$ nên tứ giác EHIF nội tiếp.

Bài 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD tâm I có điểm E thuộc cạnh BI (E khác B và I). Gọi F là điểm đối xứng của C qua E. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên cạnh AD, AB. Giả sử tọa độ $A(-4;4)$, phương trình đường thẳng $MN: 4x+3y+12=0$

$EF: 4x+5y+12=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM. (Sưu tập)

Đáp án:

Chứng minh $MN//AC$ và M, N, E thẳng hàng.

Ta có $IE//AF$ IE là đường trung bình của ΔAFC

$\Rightarrow \angle OAN = \angle IDC$

$\Rightarrow \angle ICD = \angle ONA \Rightarrow MN//AC$. Lại có $OE//AC$

Nên ta có M, N, E thẳng hàng (theo tiên đề Eulide)

Ta có: $E = EF \cap MN \Rightarrow E(-3;0)$

$F \in EF \Rightarrow F(-3+5t;-4t),(t\in\mathbb{R}) \Rightarrow O\left(\dfrac{-7+5t}{2};-2t+2\right)$ là trung điểm FA.

$O \in MN \Rightarrow 2(-7+5t)+3(-2t+2)+12=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} O(-6;4) \\ F(-8;4) \end{cases}$

Khi đó $\{M,N\}=(I)\cap MN \Rightarrow \begin{cases} (x+6)^2+(y-4)^2=4 \\ 4x+3y+12=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{36}{5}, y=\dfrac{28}{5} \\ x=-\dfrac{24}{5}; y=\dfrac{12}{5} \end{array}\right.$

Nhận xét ME > NE nên ta nhận $M\left(-\dfrac{36}{5};\dfrac{28}{5}\right)$

Đường tròn (EAM) có dạng $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

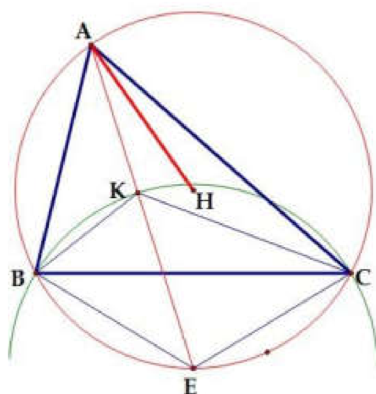
Ta có $\begin{cases} A\in(C) \\ E\in(C) \\ M\in(C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32+8a-8b+c=0 \\ 9+6a+c=0 \\ \dfrac{416}{5}+\dfrac{72}{5}a-\dfrac{56}{5}b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{15}{2} \\ b=1 \\ c=36 \end{cases}$

Do đó phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là: $(C): x^2+y^2-15x+2y+36=0$



Bài 81. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có $A(2;6)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABClần lượt là $H\left(-\frac{1}{2};1\right)$ và $K(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Đáp án:



Dễ dàng lập được phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đường phân giác trong AK.

Khi đó gọi E là giao điểm giữa (H) và AK ta có E là điểm chính giữa cung BC. Khi đó tọa độ E thỏa hệ: $\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{125}{4} \xrightarrow{A(2;6)} E(2;-4)\\ x-2=0\end{cases}$

Ta chứng minh $EK = EB = EC$

Ta có $\begin{cases}\angle EKC = \angle KAC + \angle ACK\\ \angle KAC = \angle KAB = \angle BCE \Rightarrow \angle ECK = \angle EKC \Rightarrow \Delta EKC \text{ cân tại E} \Rightarrow EK = EC\\ \angle ACK = \angle BCK\end{cases}$

Mà $EC = EB \Rightarrow B,C$ thuộc vào đường tròn tâm E,bán kính EB. Do đó tọa độ B,C thỏa mãn

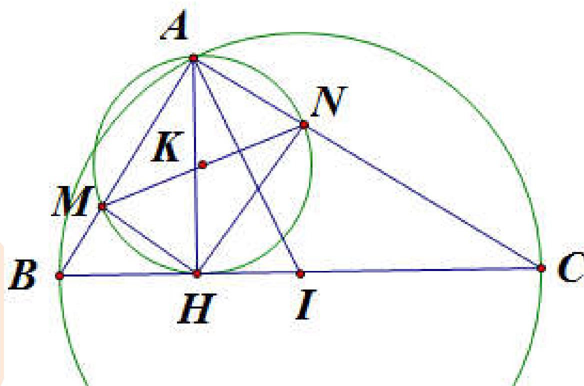
$\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{125}{4}\\ (x-2)^2+(y+4)^2=25\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}B(-3;-4),C(5;0)\\ B(5;0),C(-3;-4)\end{array}\right.$. Do AB < AC nên ta nhận $B(5;0),C(-3;-4)$



Bài 82: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn

(T)$^{/}$ có pt: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.Gọi H là hình chiếu của A trên BC, đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC, biết pt đt MN là 20x – 10y – 9 = 0 và điểm H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

Hình vẽ:



$\widehat{HIA} = 2\widehat{ICA} = 2\widehat{BAH}.(cung.phu.em.goc.B)$

$\widehat{AKN} = \dfrac{\widehat{NA} + \widehat{MH}}{2} = \dfrac{2\widehat{MH}}{2} = 2\widehat{MAH}$

$\begin{cases} \widehat{AKN} = 2\widehat{MAH} \\ \widehat{HIA} = 2\widehat{BAH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{HIA}$

Với K là trung điểm AH, gọi P là giao của AI và AM, vậy tứ giác

KPIH nội tiếp suy ra AI vuông MN.

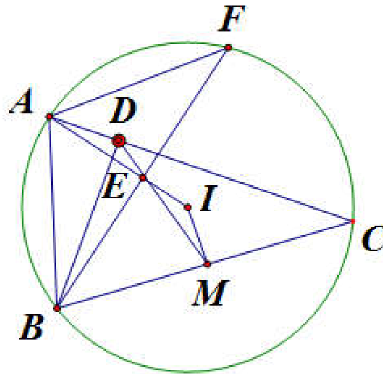
Phương trình AI: (x – 3) + 2(y – 1)= 0

Tham số hóa A, có AI = R (R là bán kính (T)$^{/}$)

A. tiếp suy được tọa độ P, tham số hóa K và M.. suy ra tọa độ H theo ẩn của K, ta có hpt MH vuông MA và MK = KA giải được tọa độ H ,pt BC.



Bài 83 : Cho tam giác ABC nội tiếp (C) tâm I, M là trung điểm BC, BE vg AI . ME Kéo dài cắt AC tại D. BD vuông góc AC



$$\begin{cases} AE \perp BF \Rightarrow EB = EF \\ BM = MC \end{cases} \Rightarrow MD // FC$$

$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ACF}$

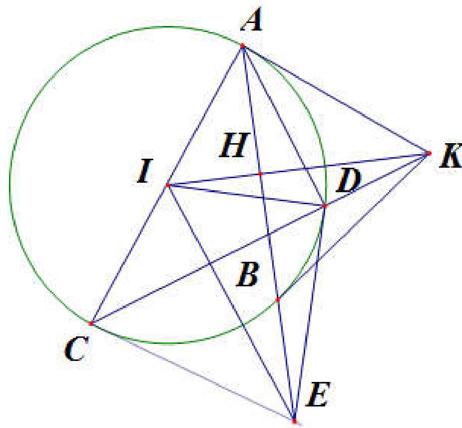
$\widehat{ACF} = \widehat{ABF}$

$\Rightarrow \square ABED$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BEA} = 90^0$

Bài 84: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn ω tâm (1;2). Từ điểm K nằm ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến KA, KB với A, B là các tiếp điểm. Kẻ đường kính AC của ω, tiếp tuyến của ω tại C cắt AB ở E, biết đường thẳng KC có phương trình 3x + 2y – 1 = 0. Tìm tọa độ điểm E biết E nằm trên đường thẳng có phương trình 12x + y + 43 = 0.





Ta có: $\widehat{KHD} = \widehat{KCL}(= \widehat{KAD})$

=> IHCD nội tiếp đường tròn (1)

$\widehat{DCE} = \widehat{AKC} = \widehat{DHE}$

=> HDCE nội tiếp đường tròn (2)   mà :IHCE nội tiếp đường tròn đk IE (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra 5 điểm I,H,D,E,C nội tiếp đường tròn đk $IE \Rightarrow \widehat{IDE} = 90^0$

$\Rightarrow \triangle ICE = \triangle IDE(ch - cgv) \Rightarrow EC = ED$

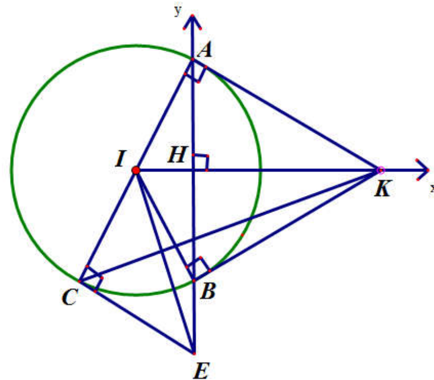
Mà IC = ID => IE là trung trực CD $\Rightarrow IE \perp CK$

Suy ra phương trình IE: -2(x – 1) + 3(y-2) = 0

$E = EI \forall (d) \Rightarrow E\left(\frac{-7}{2}; -1\right)$

Bài 85: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn ω tâm (1;2). Từ điểm K nằm ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến KA, KB với A, B là các tiếp điểm. Kẻ đường kính AC của ω, tiếp tuyến của ω tại C cắt AB ở E, biết đường thẳng KC có phương trình 3x + 2y – 1 = 0. Tìm tọa độ điểm E biết E nằm trên đường thẳng có phương trình 12x + y + 43 = 0.





Gọi độ dài hình cơ sở có độ dài AH = 1 (dvdd); IH = d(dvdd)

Chọn hệ trục tọa độ cho hình cơ sở như hình trên (AHK)

Ta có H(0;0) A(0;1) ; I(-a;0) => C(-2a;-1) ; B(0;-1)

$\overrightarrow{AI}(-a;-1)$; phương trình đường thẳng AK: a(x – 0) +(y-1) = 0

Phương trình HK: y= 0

Phương trình AB: x = 0

$$K = AK \forall HK \Rightarrow K\left(\frac{1}{a};0\right)$$

Phương trình CE: a(x + 2a) + (y+1)= 0

$$E = CE \forall AH \Rightarrow E(0;-1-2a^2)$$

$$\overrightarrow{IE}(a;-1-2a^2).\overrightarrow{CK}\left(\frac{1+2a^2}{a};1\right)$$

Ta có $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{CK} = a.\frac{1+2a^2}{a} + 1.(-1-2a^2) = 0$

Vậy CK vuông AI.

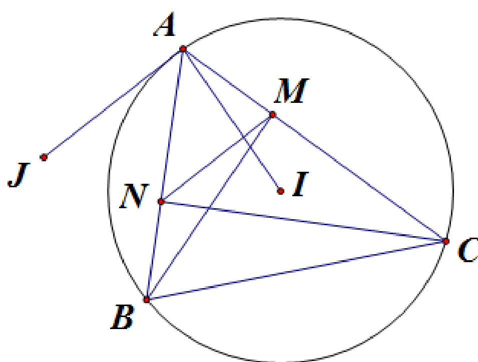
Gọi độ dài các cạnh của hình thực là: AH = b = 1.k , AI = c = k.a. Thực hiện phép biến hình tâm H với tỉ số K lần lượt ta được hình thực thỏa mãn đề, chuyển về hình thực ta có $CK \perp IE$

Suy ra phương trình IE: -2(x – 1) + 3(y-2) = 0

$$E = EI \forall (d) \Rightarrow E\left(\frac{-7}{2};-1\right)$$



Bài 87: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (T): $x^2 + y^2 = 25$ ngoại tiếp tam giác ABC có chân đường cao kẻ từ B,C lần lượt là M(1;3), N(2;3). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết a có tung độ âm.



Kẻ tiếp tuyến AJ bạn nhé, khi đó chứng minh được $IA \perp MN$

ta có $\angle JAB = \angle ACB$

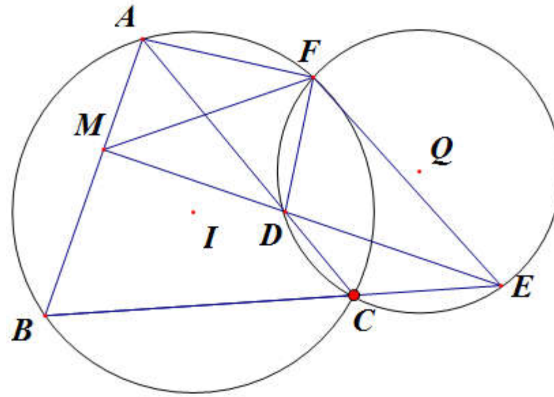
Mặt khác tứ giác BCNM nội tiếp $\rightarrow \angle ANM = \angle ACB$

Hay $\angle JAB = \angle ANM$ hay NM // JA suy ra MN vuông AI,

Bài 88: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T). Từ điểm M thuộc cạnh AB $(M \neq A, M \neq B)$, kẻ đường thẳng vuông góc với AB, cắt các đường thẳng AC, BC lần lượt tại D(9;-2) và E. Đường tròn đi qua 3 điểm D,E,C cắt đường tròn (T) tại điểm F(2;-3) khác C.
Tìm tọa độ đỉnh A, biết A thuộc đường thẳng d: x+y-5 = 0

Hình vẽ:





Ta có $\angle ABF = \angle ACF$ (chắn cung AF trên đường tròn tâm (I), (*)

Lại có $\angle ACF = \angle DEF$ (chắn cung DF trên đường tròn tâm (O) (**)

Từ (*) và (**) suy ra tứ giác MBCE nội tiếp, $\Rightarrow \angle MEB = \angle MFB$

Mặt khác $\angle MEB = \angle DFC$ (chắn cung DC trên đường tròn tâm (O)

$\Rightarrow \angle DFC = MFB$ (t/c bắc cầu)

Ta lại có $\angle BFC = \angle BFD + \angle DFC = \angle BFD + \angle MFB = \angle MFD$ (1)

Ta lại có tiếp $\angle MAD = \angle CFC$ (chắn cung BC trên (I)) (2)

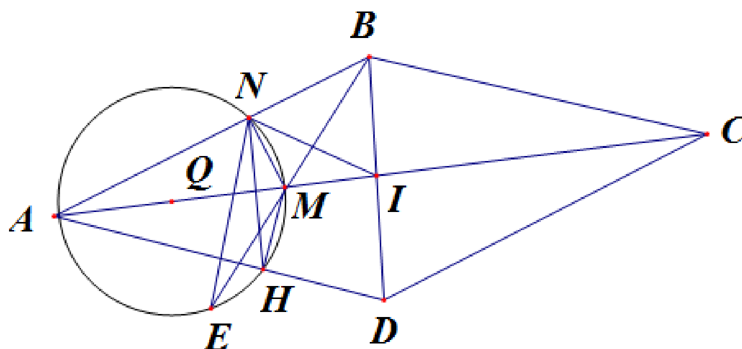
Từ (1) và (2) ta có $\angle MAD = \angle MFD$ hay tứ giác MAFD nội tiếp

$\Rightarrow \angle AFD = 90^0$ hay $AF \perp DF$ .. có tọa độ D(9;-2) và F(2;-3) và A thuộc đường thẳng D: x+y-5=0, ta tính được tọa độ A(1;4)

Bài 89: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình cạnh CD: 2x+y+3=0. I là giao điểm của AC và BD. Gọi M là điểm trên đoạn AI (M khác A và I), đường tròn đường kính AM cặt cạnh AB tại N, cắt đường thẳng BM tại F. Đường tròn đường kính AM có phương trình (C): $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình thoi, biết tâm đường tròn nôi tiếp tam giác EIN thuộc trục hoành.(số liệu chỉ mang tính chất minh họa)

Hình vẽ:





Có tứ giác BANI nội tiếp $(\hat{I} = \hat{E} = 90^0) \rightarrow \widehat{MEI} = \widehat{BAI}$

Mặt khác có $\widehat{ABI} = \widehat{NEM}$ (chắn cung NM)

$\Rightarrow \angle NEM = \angle MEI$ (*)

gọi $H = IE\forall(O)$, ta có $2\widehat{AIE} = (\widehat{AE} - \widehat{HM}), 2\widehat{ABE} = \widehat{AE} - \widehat{NM}$

ta có $\widehat{ABE} = \widehat{AIE}$ (chắn cung AE) $\rightarrow \widehat{NM} = \widehat{MH}$,hay $\widehat{HAM} = \widehat{MAN}$;

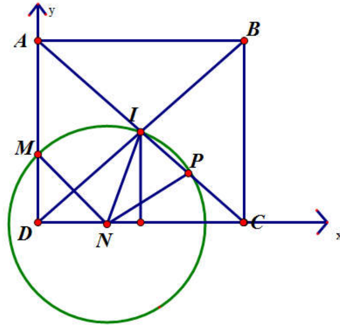
ta lại có $\widehat{DAM} = \widehat{NAM}$ hay H thuộc AD, -> IM là trung trực của NH,

-> IM là phân giác $\widehat{NIH}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle NEI$

Bài 90: Cho hình vuông ABCD có tâm I và N trên cạnh CD sao cho CN = 3ND. Đường tròn tân N bán kính NI cắt đường chéo AC tại điểm thứ 2 là P(3;1) và cắt đoạn thẳng AD tại M, đường thẳng MN có phương trình MN: x+y+1=0, xác định tọa độ các đỉnh hình vuông. Biết B có hoành độ nguyên.(số liệu chỉ mang tính chất minh họa)





Gọi hình vuông cơ sở ABCD có độ dài là 8 (dvdd) chọn hệ trục tọa độ như hình ,,, suy ra D(0;0) A(0;8), B(8;8), C(8;0), I(4;4), N(2;0)

Phương trình đường tròn tâm (N) bán kính NI: $(x-2)^2+(y-0)^2=20$;

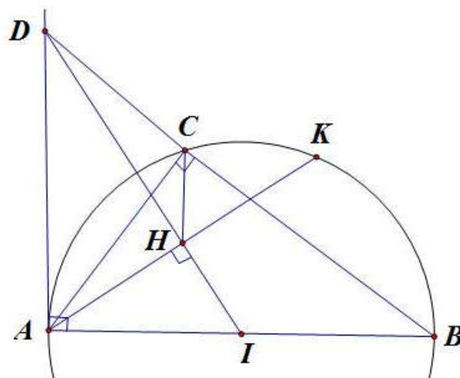
Pt IC: x +y = 8; $P=(N)\forall IC \to P(6;2)$

Phương trình AD: x = 0 , $M=(N)\forall AD \to M(0;4)$ và $M'(0;-4)$; loại M' vì M nằm giữa AD

Như vậy $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0 \to MN \perp NP$,

Bài 91: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại C(2;2) nội tiếp đường tròn tâm I. Tiếp tuyến tại A cắt BC tại D, đường thẳng AK vuông góc với DI tại H cắt (I) tại K. Biết phương trình AK: x-y-2 = 0, điểm E(1;0) thuộc HB và $x_B<0$. Tìm tọa độ các đỉnh A; B.

Hình vẽ:





Xét $\widehat{DCA} = \widehat{DHA}$ suy ra tứ giác ADCH nội tiếp suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{DHC}$

Mặt khác có $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{ABC}$ (1)

Từ đó rút ra tứ giác CHIB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ICB} = \widehat{IHC} = \widehat{IBC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{DHC} = \widehat{IHB} \Rightarrow \widehat{CHK} = \widehat{KHB}$. Hay AK là phân giác góc $\widehat{CHB}$.

Lấy $C^/$ đối xứng với C qua AK suy ra $C^/$ thuộc HB.

Dễ dàng tìm thấy được tọa độ $C^/(4;0)$ suy ra phương trình AH qua E và $C^/$ là y = 0.

Tọa độ điểm H thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2;0)$

Phương trình DI qua H vuông góc với AK lfa : x+y-2 = 0

Gọi A(a+2; a); B(b; 0) $\Rightarrow I\left(\dfrac{a+b+2}{2};\dfrac{a}{2}\right)$. Khi đó ta có hệ sau:

$$\begin{cases} I \in DI \\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a+b+2}{2} - 2 = 0 \\ a(b-2) - 2(a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ ab - 4a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2; b = 6 \\ a = 1; b = 0 \end{array}\right.$$

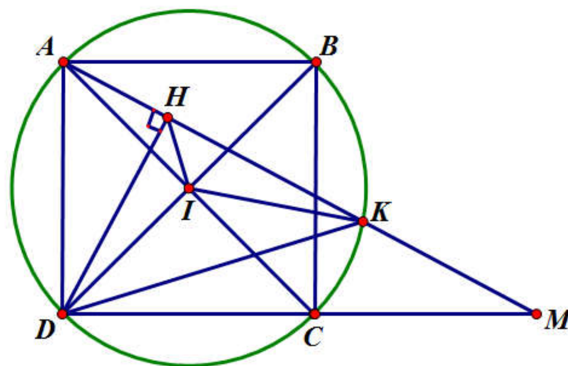
Do $x_B > 0$ suy ra A(0;-2), B(6;0)

Kết luận: tọa độ các điểm A(0;-2), B(6;0)

Bài 92: Cho hình vuông ABCD có tâm I. gọi M là điểm đối xứng của D qua C.Gọi H,K lần lượt là chân đường cao hạ từ D, C lên AM.Giả sử K(1;1), đỉnh B thuộc đt: 5x+3y-10=0 và pt đt HI: 3x+y+1=0. Tìm tọa độ đỉnh B.

Hình vẽ:





có ngũ giác ABKCD thuộc 1 đường tròn tâm I, đường kính AC

$\Rightarrow \widehat{BKD} = 90^0 \Rightarrow BK \perp DK$ (1)

$\Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{ABD} = 45^0 \Rightarrow \triangle HDK$ vuông cân tại H

$\begin{cases} HD = HK \\ ID = IK \end{cases} \Rightarrow HI \perp DK$ (2)

Từ (1) và (2) => HI//BK

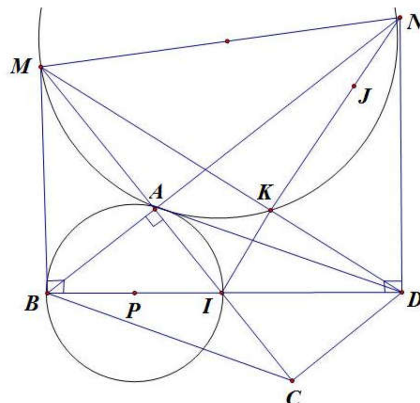
⇨ BK: $x + y - 4 = 0$

$B: \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 5x + 3y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Bài 94: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành ABCD cps I là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD đồng thời thỏa mãn $\widehat{BAI} = 90^0$. Đường thẳng qua B và vuông góc với BD cắt AI tại M. đường thẳng qua D và vuông góc với BD cắt AB tại N. giả sử đường thẳng DM có phương trình: x+y-4=0, đường thẳng NK đi qua điểm J(5;0) và điểm $P\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$ là trung điểm của BI. Tìm tọa độ điểm C.(số liệu chỉ mang tính chất minh họa) – THẦY HUỲNH ĐỨC KHÁNH

Hình vẽ:





Hướng dẫn làm:

$\widehat{MBD} = \widehat{MCD} = 90^0 \Rightarrow \square MBCD$ nội tiếp

$\begin{cases} \widehat{CBD} = \widehat{CMD} \\ \widehat{ADB} = \widehat{CBD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ADB}$ (1)

$\widehat{LAN} = \widehat{NDI} = 90^0 \Rightarrow \square ANID$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{ADI}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ANK} \Rightarrow \square MAKN$ nội tiếp

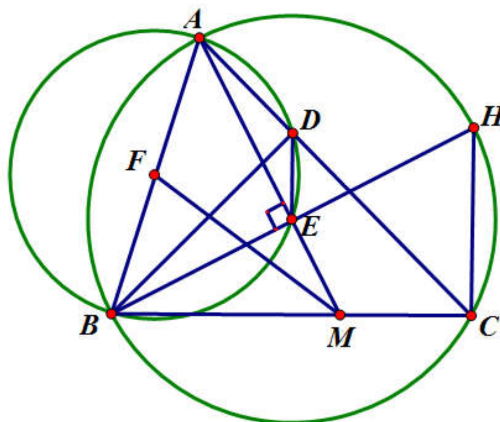
$\Rightarrow \widehat{MKN} = \widehat{MAN} = 90^0$

$\Rightarrow MD \perp NI$

Bài 95: Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Điểm M(2;-1) là trung điểm cạnh BC và điểm E là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AI. Gọi D là giao điểm của ME và AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE có phương trình $x^2 + y^2 - 2y - 6 = 0$ và C thuộc đường thẳng Δ: x + y - 4 = 0.Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.(Số liệu chỉ mang tính chất minh họa)

Hình vẽ:





Gọi F là trung điểm của AB, và H là giao điểm của BE và (ABC)

$$\begin{cases} AE \perp BH \Rightarrow BE = EH \\ BM = MC \end{cases} \Rightarrow ME // CH$$

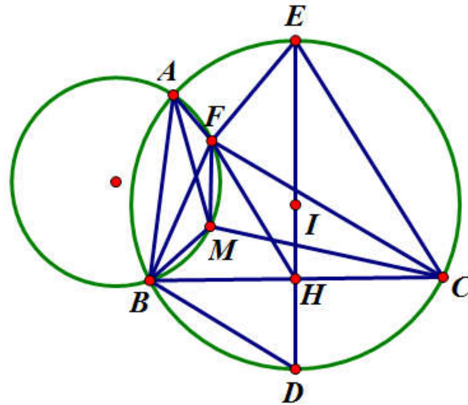
$$\begin{cases} \widehat{MDC} = \widehat{MCD} \\ \widehat{ABH} = \widehat{ACH} \end{cases} \Rightarrow \square AEDE$$ nội tiếp

Hay F là tâm của đường tròn ngoại tiếp (ADE) hay BF=FA=R

Bài 97: Cho tam giác ABC nhọn AC<AC, có AD là phân giác trong góc BAC. Với D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, gọi E là điểm đối xứng của D qua tâm I. M là trung điểm AD, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt cạnh AC tại F, chứng minh tính chất È vuông với AC.

Hình vẽ:





AFAMB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AMB}$

$$\begin{cases} \widehat{AFB} = \widehat{BFC} = 180^0 \\ \widehat{AMB} = \widehat{BMD} = 180^0 \\ \widehat{AFB} = \widehat{AMB}(chan.cung.AB) \end{cases} \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{BFC} \quad \textbf{(1)}$$

Có $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ **(2)**

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle BCF \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DM}{CF} \Rightarrow \dfrac{BD}{2BH} = \dfrac{\frac{1}{2}DA}{CF}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CH}{CF}$ **(3)** ; $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ **(4)**

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \triangle BDA \sim HCF(c-g-c) \Rightarrow \widehat{HFC} = \widehat{BAD}$

Lại có $\widehat{BAD} = \widehat{DEC}$

⇨ FHCE nội tiếp $\Rightarrow$ EF $\perp AC$

Câu 98 (Thpt – Minh Châu – lần 2) Trong mặt phẳng toạ độ*Oxy,* cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh B,C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$. **Đáp số :**B(4;-1)**;** $C(-5;-4)$**.**

Ta thấy tứ giác BMHN nội tiếp, suy ra I là trung điểm của BH;
$B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$

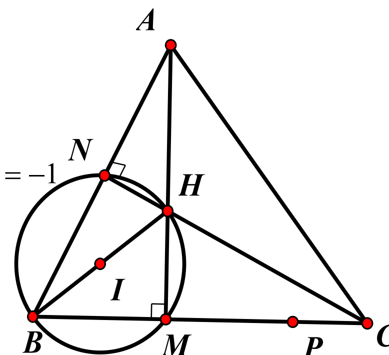
Suy ra $H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP} = (2t-1;-t-2)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2) = 0 \Leftrightarrow 5t^2+10t+5=0 \Leftrightarrow t=-1$

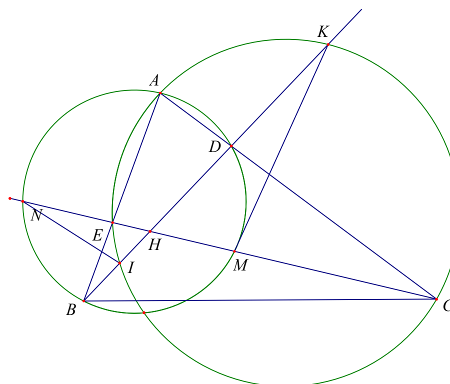
Suy ra $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH} = (1;-3)$,đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Tìm được toạđộ $C(-5;-4)$.



Câu 99 (Thpt – Tĩnh Gia) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Trên hai đoạn thẳng AB, AC lần lượt lấy hai điểm E, D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB cắt tia CE tại M(1;0) và N(2;1). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt tia BD tại I(1;2) và K. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNK.

Đáp số : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.



Theo giả thiết $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$, suy ra BCDE là tứ giác nội tiếp.

Gọi H là giao điểm của BD và CE. Do ΔBEH đồng dạng với ΔCDH nên $HD.HB = HE.HC$.



Do ΔHBN đồng dạng với ΔHMD nên $HD.HB = HM.HN$.

Do ΔHIE đồng dạng với ΔHCK nên $HE.HC = HI.HK$.

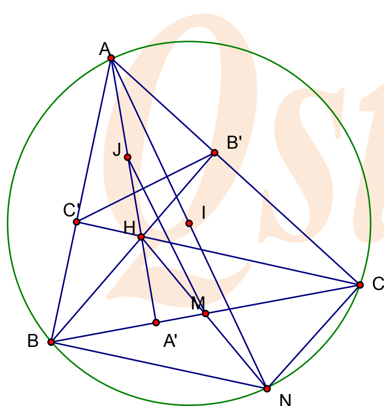
Do đó $HM.HN = HI.HK$ suy ra ΔIHN đồng dạng với ΔMHK, nên $\widehat{NIH} = \widehat{KHM}$.

Suy ra NIMK là tứ giác nội tiếp.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MNI cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác MNK, có pt: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Câu 100 (Thpt – C Nghĩa Hưng) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ*Oxy*,cho tam giác đường cao AA'có phương trình x+2y-2=0 trực tâm H(2;0) kẻ các đường cao BB'và CC' đường thẳng B'C' có phương trình x-y+1=0 M3;-2) là trung điểm BC .tìm tọa độ các đỉnh A,B và C.

Đáp số : B $(3+\sqrt{13};-2+2\sqrt{13})$ C $(3-\sqrt{13};-2-2\sqrt{13})$.



Xét đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABC kẻ đường kính AN

=> M là trung điểm HN = > N(4;-4)

J là trung điểm AH = >MJ//AN và MJ $\perp$ B'C'

Phương trình AN là x+y=0 =>tọa dộ A(-2;2)

= > I(1;-1)

BC có Phương trình $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2+2t \end{cases}$

B(3+t;-2+2t)

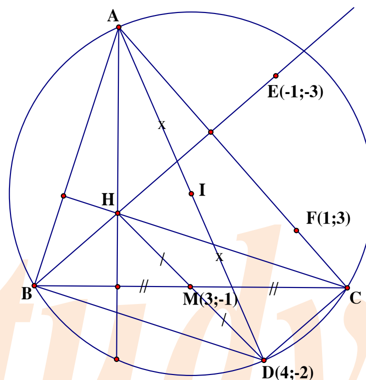
IB=IA



=> B $(3+\sqrt{13};-2+2\sqrt{13})$ C $(3-\sqrt{13};-2-2\sqrt{13})$

Câu 101 (Thpt – Núi Thành – Quảng Nam) Trong mặt phẳng (Oxy), cho tam giác ABC có trung điểm của BC là M(3;-1), đường thẳng chứa đường cao vẽ từ B đi qua E(-1;-3) và đường thẳng chứa cạnh AC qua F(1;3). Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC biết D(4;-2) là điểm đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đáp số : A(2;2) ;B(1 ;-1) và C(5 ;-1).



+ Chứng minh được tứ giác BHCD là hình bình hành

+ Tìm được H(2;0).

+ PT đường cao (BH):x-y-2=0.

+ PT cạnh (AC):x+y-4=0.

+Gọi C(c ;4-c) thuộc AC. Nhờ t/c trung điểm suy ra B(6-c ;-6+c).

B nằm trên BH nên ta có (6-c)-(-6+c)-2=0 hay c=5. Suy ra : B(1 ;-1) và C(5 ;-1).

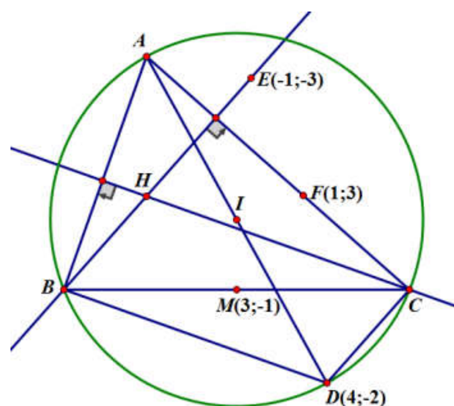
+ PT đường cao (AH) đi qua H(2;0) và vuông góc BC là :x-2=0.

+ A là giao điểm của AH và AC nên A(2;2).

Câu 102. (Thpt – Yên Lạc – Lần 1 - 2015) Cho ΔABC có trung điểm cạnh BC là $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B đi qua điểm $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa AC đi qua điểm $F(1;3)$. Điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là điểm $D(4;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh của ΔABC.



Đáp số : $A(2;2)$; $B(1;-1)$; $C(5;-1)$.



Gọi H là trực tâm ΔABC thì có $BHCD$ là hình bình hành, nên *M* là trung điểm *HD* $\Rightarrow H(2;0)$

BH chứa $E(-1;-3)$ nên $(BH): \dfrac{x-2}{-1-2} = \dfrac{y-0}{-3-0} \Leftrightarrow (BH): x-y-2=0$

Do $DC \,//\, BH$ và $D(4;-2)$ thuộc *DC* nên $(DC): x-y-6=0$

Do $BH \perp AC$ và $F(1;3)$ thuộc AC nên $(AC): x+y-4=0$

Do $C = AC \cap DC$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-6=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$

Tìm được $C(5;-1)$

$M(3;-1)$ là trung điểm của BC nên $B(1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (4;0)$ Do H là trực tâm ΔABC nên $AH \perp BC \Rightarrow (AH): x-2=0$

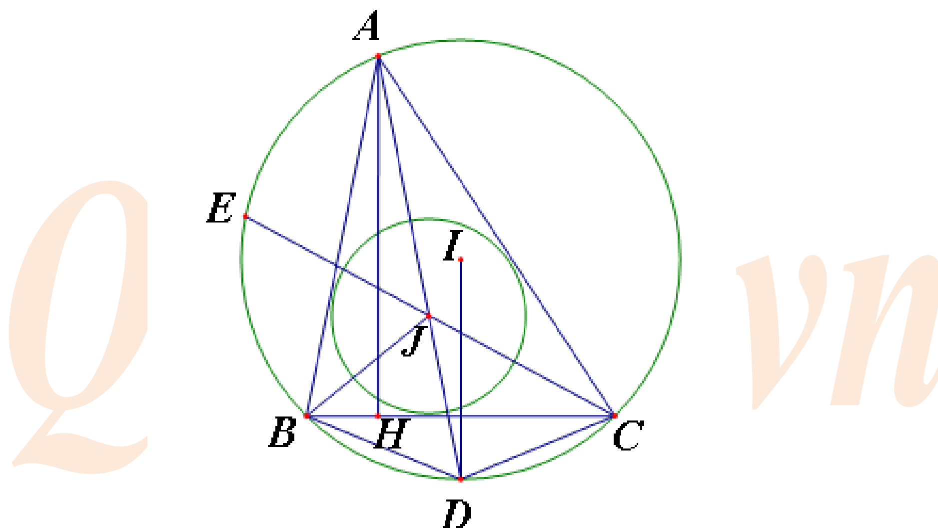
Do $A = AH \cap AC$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow A(2;2)$

Kết luận: $A(2;2)$; $B(1;-1)$; $C(5;-1)$



Câu 103. (Thpt – Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 1 - 2016) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy), cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình : $2x+y-10=0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết B có hoành độâm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x+y+7=0$.

Đáp số : $A(2;6),B(-3;-4),C(5;0)$.



AJ đi qua $J(2;1)$ và $D(2;-4)$ nên có phương trình $AJ: x-2=0$

$\{A\} = AJ \cap AH$, (trong đó H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A)

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2=0 \\ 2x+y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow A(2;6)$

Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow DB = DC$ và $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{EA}$

$\widehat{DBJ} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{EC}$ + sđ $\overset{\frown}{DC}$)= $\frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{EA}$ + sđ $\overset{\frown}{DB}$)= $\widehat{DJB} \Rightarrow \Delta DBJ$ cân tại $D \Rightarrow$



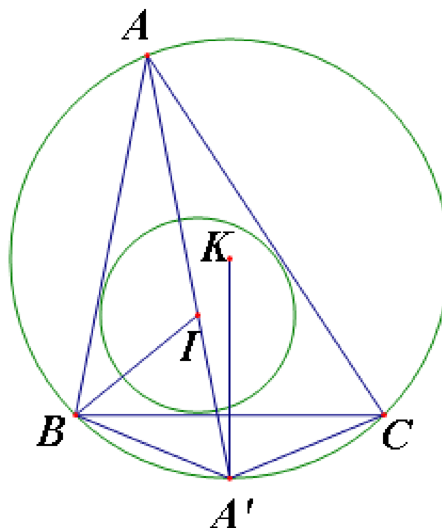
$DC = DB = DJ$ hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC Suy ra B, C nằm trên đường tròn tâm $D(2;-4)$ bán kính $JD = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$ có phương trình $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ x + y + 7 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4\end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -9\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-3;-4) \\ B(2;-9)\end{array}\right.$$

Do B có hoành độ âm nên ta được $B(-3;-4)$

Câu 104. (THPT – Yên Lạc 2 – Lần 1 - 2016) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(-1;-1), đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết I(1 ;1) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đáp số : BC : 3x+4y-17=0.





+) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm K(3;2) bán kính R=5

Đường thẳng AI có phương trình: x - y = 0

Gọi A' là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Tọa độ A' là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=25\\ x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow$

Vì A' $\neq$ A nên A'(6;6)

+) Ta có:

$$\widehat{IBA'}=\widehat{IBA}+\widehat{CBA'}=\frac{1}{2}\widehat{BC}=\widehat{BIA'}$$

Do đó tam giác IBA' cân tại A' $\rightarrow$ IA' = A'B = A'C

Nghĩa là B và C nằm trên đường tròn tâm A' bán kính A'I

+) Đường tròn tâm A' bán kính A'I có phương trình là:

$$(x-6)^2+(y-6)^2=50$$

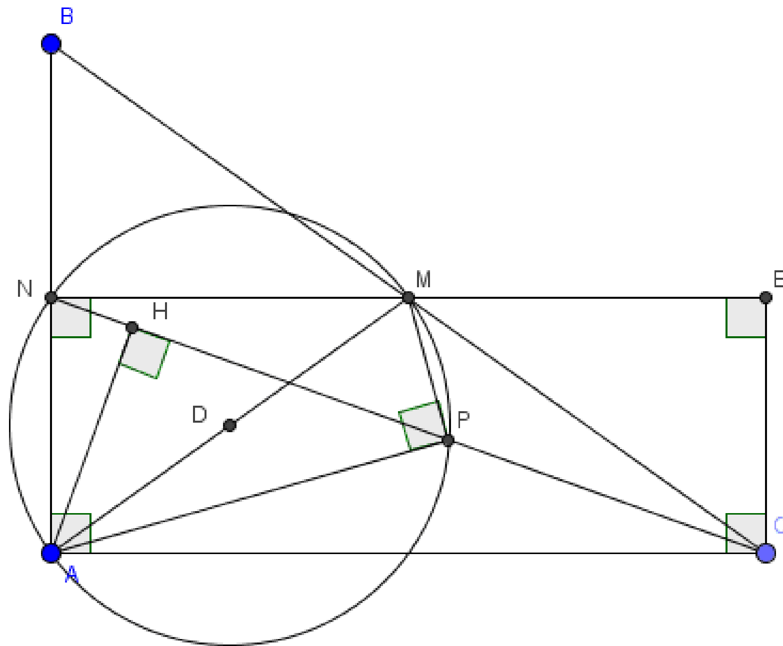
Tọa độ của B và C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=50\\ (x-3)^2+(y-2)^2=25\end{cases}$$

$\rightarrow$ Phương trình đường thẳng BC có dạng 3x + 4y - 17 = 0

Câu 105. (Nhóm Việt Kha – Lần 1- 2016) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng $BC: 3x-y-7=0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên CN, P là trung điểm CH. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác APN là $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$, điểm $H(112/37;-31/37)$ và A có tung độ âm.





+) Chứng minh được AP vuông góc với MP

Ngoài ra trung điểm D của AM là tâm của đường tròn đã cho

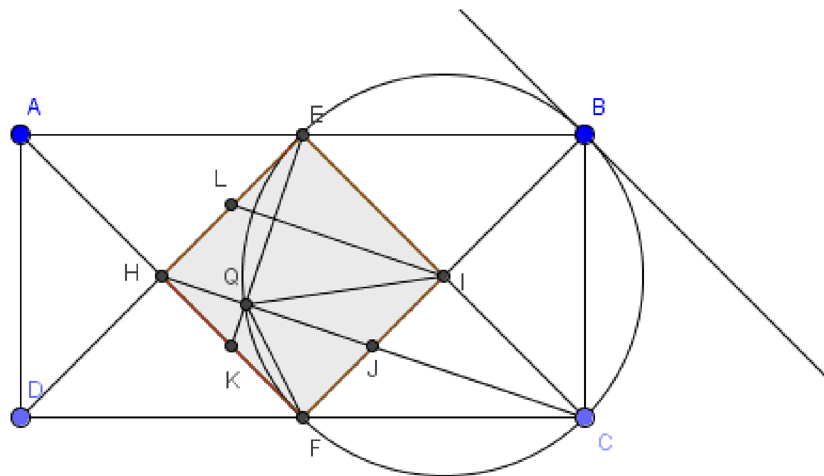
Ta tìm được M là giao điểm của đường tròn (D) với đường thẳng BC

Từ đó ta tìm được A $\rightarrow$ CN $\rightarrow$ tọa độ của N và C $\rightarrow$ B

Câu 106. (Maths287 – Lần 1 - 2016) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có hai điểm M, N lần lượt thuộc cạnh AB và CD sao cho $3AM = 3CN = AB$. K là giao điểm của AN và DM. Trực tâm của tam giác ADK là H(4 ;4), đường thẳng CD qua điểm E(-2 ;-4). Xác định toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết C thuộc đường thẳng $x + y = 0$ và có hoành độ dương.

Đáp số : A(-8 ;8) ; B(4 ;8) ; C(4 ;-4) ; D(-8 ;-4).





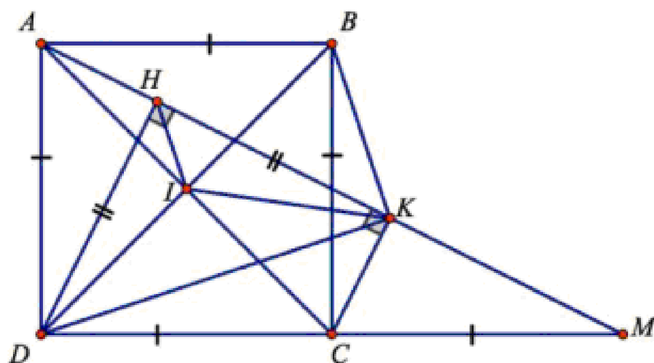
Hướng dẫn:

Dễ dàng chứng mih được E, B, Q, F cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính IQ

B là giao điểm của (d) và đường tròn (I)

Tính được E, F,C suy ra A, C ,D

Câu 107. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD tâm I. Đỉnh B thuộc đường thẳng d: 5x+3y-10=0. Gọi M là điểm đối xứng với D qua C. Điểm H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc vủa D và C lên AM. Xác định tọa độ điểm B biết K(1;1) và đường thẳng HI có phương trình là 3x+y+1=0.





Ta có: ΔBKD vuông tại K cạnh huyền BD

ΔBCD và ΔBAD lần lượt vuông tại C và A cạnh huyền BD

Do đó 5 điểm A,B,C,D,K cùng thuộc đường tròn tâm I đường kính BD

Nên $\widehat{BAD} = 90^o \rightarrow BK \perp DK$ (1)

+) Ta có $\widehat{HBD} = \widehat{AKD} = 45^o$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

$\Rightarrow \Delta HKD$ vuông cân tại H (do DH ⊥ HK) $\rightarrow HK = HD$

+) Ta lại có: ΔBKD vuông tại K nên IK=ID

Do đó HI là đường trung trực của DK $\rightarrow HI \perp DK$ (2)

Từ (1) và (2) ta được HI // DK

+) Phương trình đường thẳng BK đi qua K(1;1) và song song với HI là:

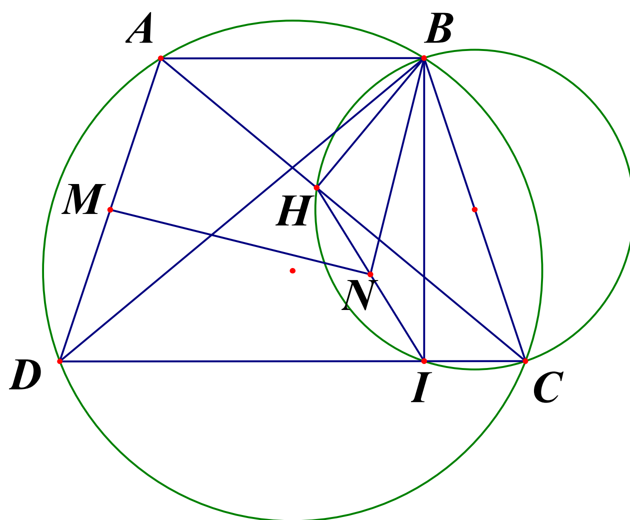
3x + y - 4 = 0

Vì B là giao điểm của BK và đường thẳng d nên $B\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Vậy $B\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Câu 108. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên các đường thẳng AC, CD, và M, N lần lượt là trung điểm của AD, HI. Viết phương trình đường thẳng AB biết M(1;-2) N(3;4) và đỉnh B nằm trên đường thẳng x + y – 9 = 0, $\cos\widehat{ABM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.





+)Xét ΔABD và ΔHBI ta có: $\begin{cases} \widehat{ABD} = \widehat{HCI} = \widehat{HBI} \\ \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{HIB} \end{cases} \rightarrow \Delta ABD \sim \Delta HBI$

Ta có : BM và BN lần lượt là trung tuyến của hai ΔABD và ΔHBI

$\rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BH}$ (1)

+) Lại có : $\widehat{ABM} = \widehat{HBN} \Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{ABH}$ (2)

Từ (1) và (2) $\rightarrow$ ΔABH ~ ΔMBN

Do đó $\widehat{MNB} = \widehat{AHB} = 90^O$ hay MN ⊥ NB

+) Đường thẳng BN đi qua N(3;4) và có vecto pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{MN} = (1;3)$ nên có phương trình x + 3y – 15 = 0

Vì B là giao điểm của BN và đường thẳng x + y – 9 = 0 nên B(6;3)

Ta có : $\overrightarrow{MB} = (5;5) = 5(1;1)$. Gọi $\overrightarrow{n_{AB}} = (a;b)$ là vecto pháp tuyến của AB

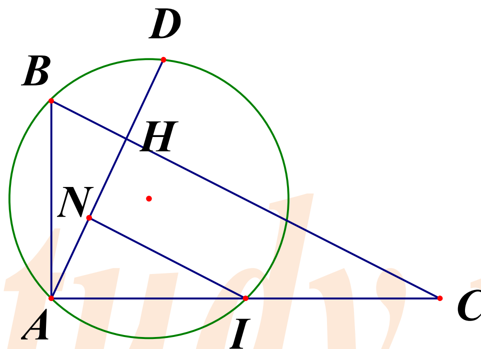
$$\rightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ 3a = b \end{array}\right.$$

- Nếu a=3b. Chọn a=3;b=1. Phương trình đường thẳng AB có dạng 3x + y – 21 = 0
- Nếu 3a=b. Chọn a=1;b=3. Phương trình đường thẳng AB là x + 3y – 15 = 0 (loại do trùng BN)



Vậy phương trình đường thẳng AB là 3x + y – 21 = 0

Câu 109. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, I là trung điểm của AC và phương trình đường thẳng AC: x – y + 1 = 0. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho HA=2HD. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết phương trình đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABI là (C): $(x-2)^2 + y^2 = 5$ và đỉnh A có hoành độ dương.



+) Gọi N là trung điểm của AH →IN là đường trung bình của ΔACH → $\begin{cases} IN \perp AH \\ CH = 2IN \end{cases}$

Xét ΔABC có HB.HC = AH^2 ⇔ $\dfrac{HB}{AH} = \dfrac{AH}{HC}$

Mặt khác: $\begin{cases} AH = ND = 2HD \\ HC = 2NI \end{cases} \rightarrow \dfrac{HB}{ND} = \dfrac{HD}{NI}$

→ ΔBHD ~ ΔDIN → $\widehat{BDH} = \widehat{DIN}$

$\Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{BDN} + \widehat{NDI} = \widehat{DIN} + \widehat{NDI} = 90^O$

Do đó BDIA là tứ giác nội tiếp.

+) Vì A, I là giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng AC, và điểm A có hoành độ dương

→ A(1;2) I(0;1)

Lại có I là trung điểm AC nên C-1;0)

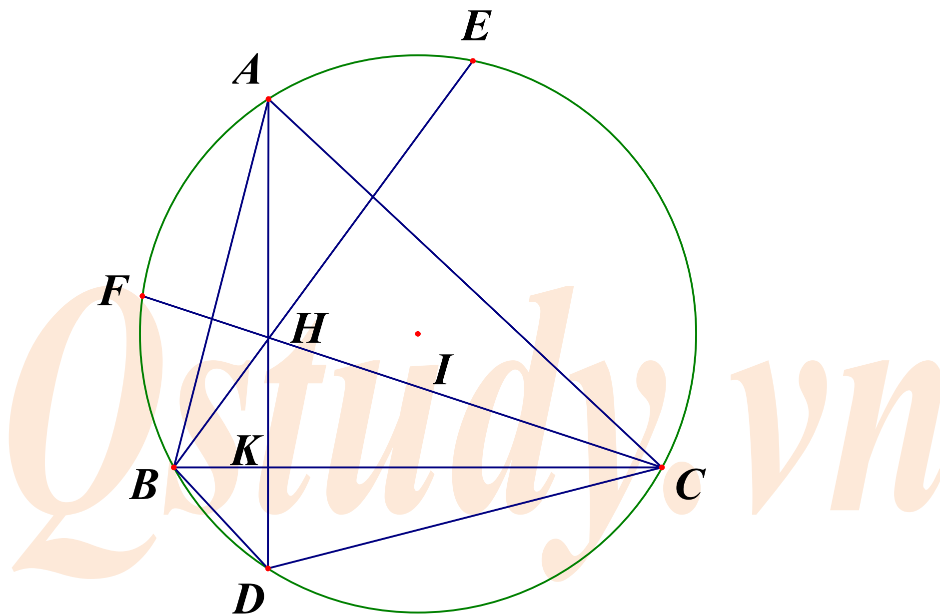
Phương trình đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với AC là: x + y – 3 = 0



B là giao điểm khác A của đường tròn (C) và AB nên B(4;-1)

Vậy A(1;2) B(4;-1) C(-1;0)

Câu 110. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (C). Các đường cao hạ từ A, B cắt đường tròn (C) lần lượt tai các điểm D(3;1); E(1;-5) (D,E không trùng với A,B). Biết rằng chân đường cao từ đỉnh A là điểm K(3;-3). Tìm tọa độ điểm C.



+) Gọi H là trực tâm của ΔABC, K là giao điểm của AH và BC.

Ta có $\widehat{HBC}=\widehat{DAC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ACB}$) và $\widehat{DBC}=\widehat{DAC}$

$\rightarrow \widehat{HBC}=\widehat{DBC} \rightarrow \Delta KBH=\Delta KBD \rightarrow BH=BD$

Do đó tam giác BHD cân tại B

→BC là đường trung trực của HD và CH = CD

+) Tương tự ta có CE = CH → CD = CE

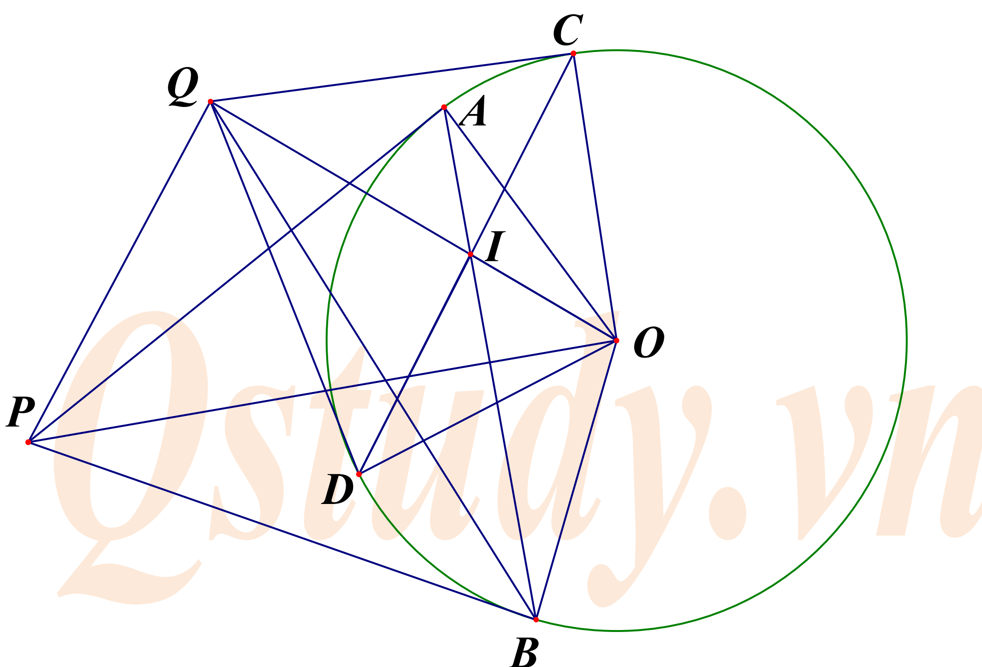
+) Phương trình đường thẳng BC qua K và vuông góc với KD là y+3=0

C là giao điểm của KD và CD = CE nên C(5;-3)

Vậy C(5;-3)



Câu 111. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ O, từ điểm P trên đường thẳng y – 3 = 0 kẻ hai tiếp tuyến PA và PB tới (C). Gọi I là điểm trên đoạn AB, qua I kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt (C) tại C và D. Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại C và D cắt nhau tại Q(2;-1). Tìm tọa độ các điểm P,A,B biết rằng PA= $2\sqrt{5}$ và điểm A có hoành độ nguyên



+) Ta có tứ giác PAOB nội tiếp đường tròn đường kính OP và tứ giác QCOD nội tiếp đường tròn đường kính OQ

$\rightarrow$ IO.IQ=IC.ID

Mặt khác tứ giác ACBD nội tiếp đường tròn, nên IA.IB=IC.ID

$\rightarrow$ IA.IB=IO.IQ $\rightarrow$ tứ giác QAOB nội tiếp

Mà tứ giác PAOB nội tiếp đường tròn đường kính OP nên 5 điểm P, Q, O, A, B cùng thuộc đường tròn đường kính OP

Do đó PQ $\perp$ OQ

+) Phương trình đường thẳng PQ đi qua Q và vuông góc với OQ là: $2x - y - 5 = 0$



P là giao điểm của PQ và đường thẳng y – 3 = 0 nên P(4;3)

$\to$ phương trình đường tròn (C) là $x^2 + y^2 = 5$

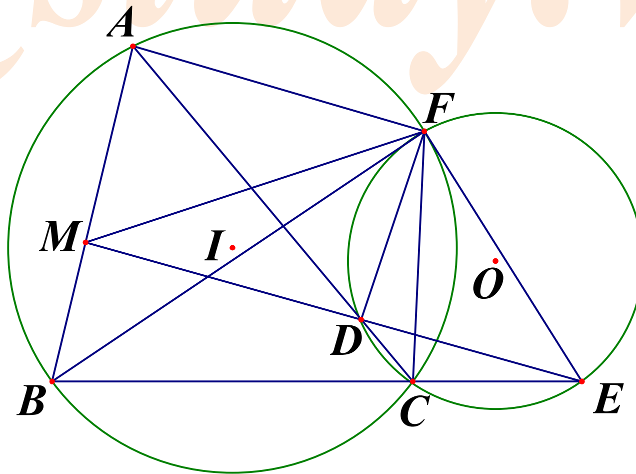
+) Tọa độ A,B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = -1 \\ x = -\frac{2}{5}; y = \frac{11}{5} \end{array} \right.$$

Vì A có hoành độ nguyên nên A(2;-1) B$\left(-\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)$

Vậy A(2;-1) B$\left(-\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)$ P(4;3)

Câu 112. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T). Từ điểm M thuộc cạnh AB (M ≠ A, M ≠ B) kẻ đường thẳng vuông góc với AB, cắt các đường thẳng AC, BC lần lượt tại D(9; -2) và E. Đường tròn đi qua 3 điểm D, E, C cắt đường tròn (T) tại điểm F(2;-3) khác C. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A thuộc đường thẳng d: x + y – 5 = 0.



+) Ta có: $\widehat{ABF} = \widehat{ACF}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn tâm I)

$\widehat{ACF} = \widehat{DEF}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{DF}$ của đường tròn tâm O)

$\to$ tứ giác MBCE nội tiếp $\to \widehat{MEB} = \widehat{MFB}$



Mặt khác $\widehat{MEB} = \widehat{DFC}$ (cùng chắn cung $\widehat{DC}$ của đường tròn tâm O)

$\rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{DFC}$

+) Ta lại có: $\widehat{MFD} = \widehat{DFB} + \widehat{MFB} = \widehat{DFB} + \widehat{DFC} = \widehat{BFC}$

Và: $\widehat{BFC} = \widehat{MAD}$ (chắn cung $\widehat{BC}$ của đường tròn tâm I)

$\rightarrow \widehat{MFD} = \widehat{MAD}$ $\rightarrow$ tứ giác MAFD nội tiếp

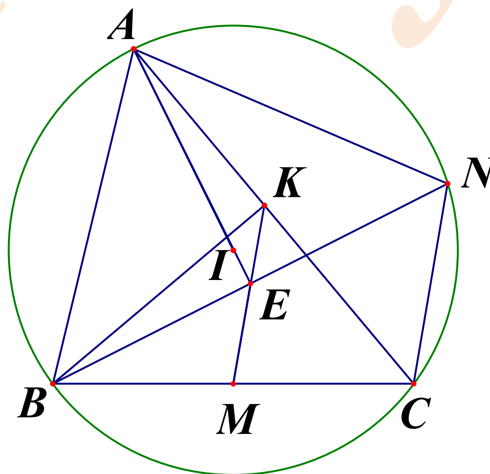
$\rightarrow$ AF $\perp$ DF

+) Phương trình đường thẳng AF đi qua F và vuông góc với DF là: 7x + y – 11 = 0

Vì A là giao điểm của AF và đường thẳng d nên A(1;4)

Vậy A(1;4)

Câu 113. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. M(2;-1) là trung điểm của BC và E$\left(\frac{31}{13};-\frac{1}{13}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AI. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết phương trình đường thẳng AC: 3x + 2y – 13 = 0



+) Gọi giao điểm của ME và AC là K

Giao điểm của BE và đường tròn tâm I là N



+) Ta có IA $\perp$ BN tại E $\rightarrow$ E là trung điểm của BN

Do đó ME là đường trung bình của ΔBNC $\rightarrow$ ME // NC

$\rightarrow \widehat{MCK} = \widehat{KCN}$

Lại có $\widehat{ABE} = \widehat{KCN}$ $\rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{MKC}$

$\rightarrow$ tứ giác ABEK nội tiếp

Vì vậy BK $\perp$ AC

+) Phương trình đường thẳng ME đi qua hai điểm M và E là 12x – 5y – 29 = 0

K là giao điểm của AC và ME $\rightarrow K\left(\dfrac{41}{13};\dfrac{23}{13}\right)$

+) Phương trình đường thẳng BK đi qua K và vuông góc với AC là: 2x – 3y – 1 =0

Gọi B $B\left(a;\dfrac{2a-1}{3}\right)$. Vì M là trung điểm của BC $\rightarrow C\left(4-a;-2-\dfrac{2a-1}{3}\right)$

Lại có C nằm trên đường thẳng AC $\rightarrow$ a = -1 $\rightarrow$ B(1;-1) C(5;-1)

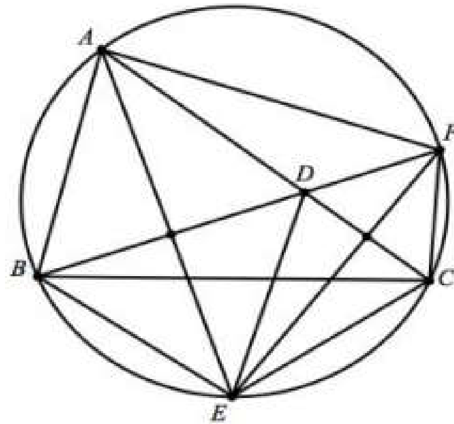
+) Phương trình đường thẳng AE đi qua C và vuông góc với BE là: 11x + 3y – 26 = 0

A là giao điểm của AE và AC $\rightarrow$ A(1;5)

Vậy A(1;5) B(1;-1) C(5;-1)

Câu 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn, AC>AB. Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm E(-4;-4) (E khác A). Gọi D(1;1) là điểm trên cạnh AC sao cho ED = EC. Tia BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai F(4;0). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác





+) Vì E là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ nên EB = EC

Mặt khác ta lại có ED = EC (giả thiết) $\rightarrow$ EB = ED (1)

Tam giác ECD cân có: $\widehat{ECD} = \widehat{EDC}$

$\rightarrow \widehat{ADE} = 180^o - \widehat{EDC} = 180^o - \widehat{ECD} = \widehat{ABE}$ (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AE là trung trực của BD và AE $\perp$ BD (3)

+) Xét tam giác DCF có $\widehat{DCF} = \widehat{ABF} = \widehat{ADB} = \widehat{CDF}$

$\rightarrow \Delta$DCF cân tại F

Do đó FD = FC $\rightarrow$ EF là đường trung trực của CD $\rightarrow$ EF $\perp$ AC (4)

+) Từ (3) và (4) ta có D là trực tâm tam giác AEF

+) Phương trình đường thẳng EF đi qua hai điểm E và F là x – 2y – 4 = 0

Phương trình đường thẳng AC qua D vuông góc với EF là 2x + y – 3 =0

Phương trình đường thẳng AE qua E vuông góc với DF là 3x – y + 8 = 0

Vì A là giao điểm của AC và AE nên A(-1;5)

+) Gọi H là giao điểm của EF và AD $\rightarrow$ H là trung điểm của CD và H(2;-1) $\rightarrow$ C(3;-3)

+) Phương trình đường thẳng BF đi qua hai điểm D và F là x + 3y – 4 = 0

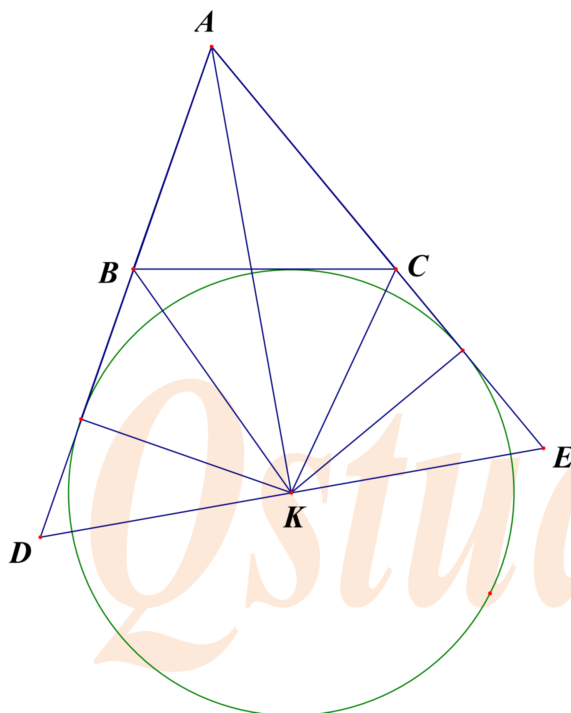
Gọi G là giao điểm của BF và AE thì G là trung điểm của BD và G(-2;2) $\rightarrow$ B(-5;3)

Vậy A(-1;5) B(-5;3) C(3;-3)

Câu 115. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh B(2;9) và tâm đường tròn bàng tiếp góc



A là điểm K(14;15). Đường thẳng đi qua K vuông góc với AK cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại D, E thỏa mãn BD.CE = 288. Tìm tọa độ các đỉnh A, C biết điểm D có hoành độ dương nằm ngay trên đường thẳng 10x – y + 7 = 0.



+) Xét ΔADE có đường cao AK đồng thời là phân giác

$\rightarrow$ ΔADE cân tại A

$\rightarrow \widehat{D} = \widehat{E}$ (1)

+) Tứ giác BDCE có :

$$\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 360^o$$

$$\rightarrow \widehat{KBD} + \widehat{KCE} + \widehat{E} = 180^o$$

$$\rightarrow \widehat{KBD} = 180^o - \widehat{KCE} - \widehat{E} = \widehat{CKE} \quad (2)$$

+) Từ (1) và (2) ta có: ΔDKB ~ ΔECK

$$\rightarrow \frac{DB}{EK} = \frac{DK}{EC} \rightarrow DK^2 = EK.DK = BD.CE$$

+) Gọi D(a;10a+7) (a>0). Vì DK^2=288

$$\rightarrow (a-14)^2 + (10a-8)^2 = 288$$

$$\Leftrightarrow 101a^2 - 188a - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -\frac{14}{101} \end{array}\right.$$ Vì D có hoành độ dương nên a=2 $\rightarrow$ D(2;27)

+) Phương trình đường thẳng AC đi qua hai điểm A và E là: y – 3 = 0

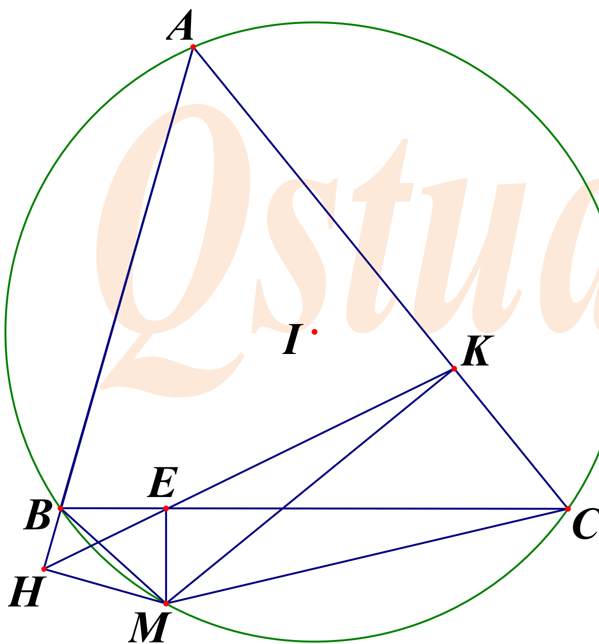
Phương trình đường thẳng BC đối xứng với đường thẳng AB qua đường thẳng KB là 3x + 4y – 42 = 0



Vì C là giao điểm của AC và BC $\rightarrow$ C(10;3)

Vậy A(2;3) C(10;3)

Câu 116. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I, điểm M thuộc cung nhỏ BC và không trùng với B, C. Gọi H(1;4) và K$\left(\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)$ lần lượt là hình chiếu của M lên AB và AC. Phương trình đường thẳng BC: x + y – 1 = 0 và khoảng cách từ M đến BC bằng $2\sqrt{2}$. Tìm tọa độ điểm A biết điểm M có hoành độ dương.



+) Gọi E là hình chiếu của M lên BC

Khi đó ME = $2\sqrt{2}$

+) Tứ giác MEBH và ABMC nội tiếp

$\rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HBM} = \widehat{MCA}$

Lại có tứ giác EMCK nội tiếp

$\rightarrow \widehat{MEK} + \widehat{MCA} = 180^O$

$\rightarrow \widehat{MEK} + \widehat{HEM} = 180^O$

Do đó ba điểm H, E, K thẳng hàng

+) Phương trình đường thẳng HK đi qua hai điểm H và K là 3x – y + 1 = 0

E là giao điểm của HK và BC $\rightarrow$ E(0;1)

+) Phương trình đường thẳng ME đi qua E và vuông góc với BC là x – y + 1 =0

Vì M $\in$ ME nên M(a;a+1) (a>0)

Lại có ME = $2\sqrt{2}$ nên a=2 $\rightarrow$ M(2;3)



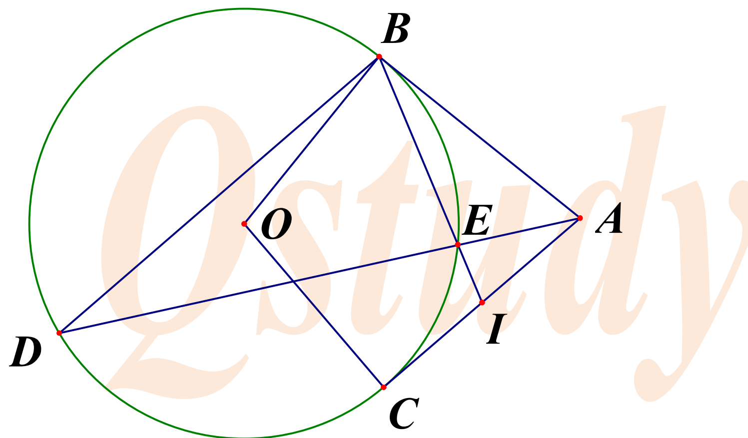
+) Phương trình đường thẳng AB đi qua H và vuông góc với HM là x – y + 3 = 0

Phương trình đường thẳng AC đi qua K và vuông góc với KM là 2x + y – 3 = 0

A là giao điểm của AB và AC $\rightarrow$ A(0;3)

Vậy A(0;3)

Câu 117. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$. Gọi A là điểm thuộc đường thẳng y – 3 = 0 và B, C lần lượt là các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ A đến (C). Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (C) tại D, AD cắt (C) tại E. Tìm tọa độ của A biết BE cắt AC tại I(1;2)



+) IC là tiếp tuyến của đường tròn (C) nên IC^2 =IE.IB (1)

Mặt khác: $\widehat{EBA} = \widehat{BDA} = \widehat{EAI}$

Do đó ΔIBA ~ ΔIAE

$\rightarrow IA^2$ =IE.IB (2)

+) Từ (1) và (2) $\rightarrow$ IC = IA

Nghĩa là I là trung điểm của AC

+) Gọi A(a;3) thuộc đường thẳng y – 3 = 0

Vì I là trung điểm của AC nên C(2 – a;1)

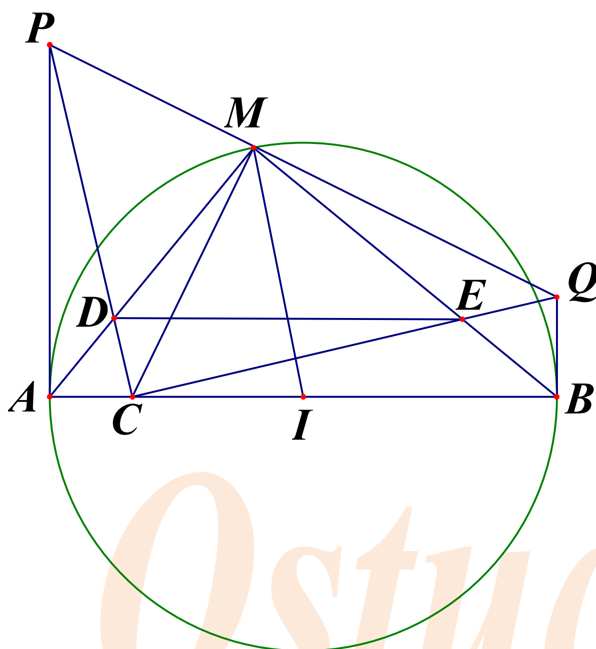
Lại có OC^2 =1 $\Rightarrow (2-a)^2 + 1 = 1$ $\Leftrightarrow$ a = 2 $\Rightarrow$ A(2;3)

Vậy A(2;3)

Câu 118. Trên nửa đường tròn tâm I đường kính AB, C thuộc AI, M thuộc nửa đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax $\perp$ AB và By $\perp$ AB. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với MC cắt Ax tại P, cắt By tại Q. Đường thẳng AM cắt PC tại D(2;1), đường thẳng MD cắt CQ tại E, đường DE cắt MI tại N. Tìm tọa



độ điểm N biết E thuộc đường thẳng d: x + y – 5 = 0 và phương trình đường thẳng MI: x – 2y + 2 = 0



+) Ta có: $\widehat{PAC}+\widehat{PMC}=180^o$

$\to$ tứ giác PACM nội tiếp

Do đó: $\widehat{MAC}=\widehat{MPC}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{MC}$)

+) Tương tự ta có :

$\widehat{MQC}=\widehat{MBC}$ (tứ giác CBQM nội tiếp)

Khi đó ta có:

$\widehat{MPC}+\widehat{MQC}=\widehat{MAC}+\widehat{MBC}=90^o\to\widehat{PCQ}=90^o$

Từ đó: $\widehat{DCE}+\widehat{DME}=180^o$

Nên tứ giác DMEC nội tiếp

Vì vậy: $\widehat{MED}=\widehat{MCD}=\widehat{MAP}=\widehat{MBA}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow$ DE // AB

I là trung điểm của AB $\to$ N là trung điểm DE

+) Gọi E(a; 5 – a) nằm trên đường thẳng d

Vì N là trung điểm của DE nên N$\left(\frac{a+2}{2};\frac{6-a}{2}\right)$

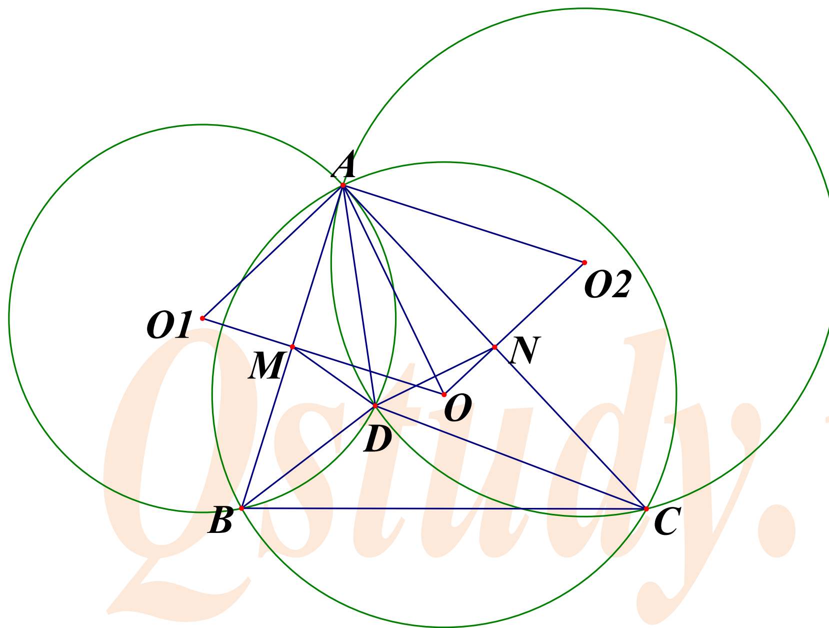
Lại có N thuộc MI $\to$ $\frac{a+2}{2}-2.\frac{6-a}{2}+2=0$ $\Leftrightarrow$ a = 2 $\to$ N(2;2)

Vậy N(2;2).

Câu 119. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O(0;0).



Đường tròn qua B tiếp xúc với AC tại A cắt đường tròn qua C tiếp xúc với AB tại A tại điểm $D\left(-\frac{5}{29};\frac{2}{29}\right)$ khác A. Biết rằng phương trình đường thẳng AB là x – y – 1 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.



+) Vì AC là tiếp tuyến của (O_1) nên $\widehat{ABD}=\widehat{CAD}$

AB là tiếp tuyến của (O_2) nên $\widehat{ACD}=\widehat{BAD}$

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CAD$

+) Gọi M, N là trung điểm của AB và AC

$\rightarrow \widehat{DMB}=\widehat{DNA}$ $\rightarrow$ tứ giác AMDN nội tiếp

Mặt khác tứ giác AMON nội tiếp đường tròn đường kính OA

Nên D thuộc đường tròn đường kính OA

Do đó AD $\perp$ OD

+) Phương trình đường thẳng AD đi qua D và vuông góc với OD là: 5x – 2y + 1 = 0

A là giao điểm của AD và AB $\rightarrow$ A(-1;-2)



Lại có OM $\perp$ AB nên M là hình chiếu của O lên AB $\rightarrow$ M$\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $\rightarrow$ B(2;1)

Phương trình đường tròn (O_1) đi qua ba điểm A,B,D là $(x-2)^2+(y+2)^2=9$

$\rightarrow O_1$ (2;-2)

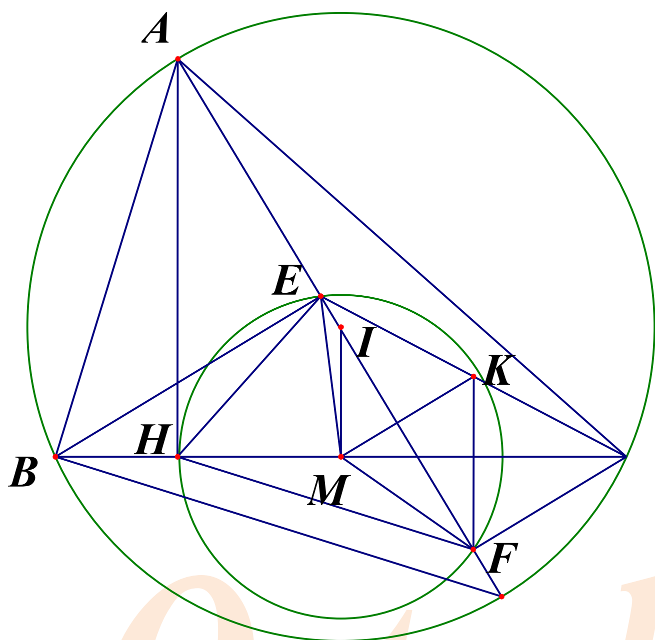
Phương trình đường thẳng AC qua A vuông góc với O_1A là x + 1 = 0

Tương tự ta có N(-1;0) nên C(-1;2)

Vậy A(-1;-2) B(2;1) C(-1;2)

Câu 120. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm I trọng tâm G$\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. Gọi E(1;1) và F$\left(\frac{8}{5};-\frac{4}{5}\right)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C lên AI. Tìm tọa độ điểm A.





+) Gọi M là trung điểm của BC

H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của ΔABC

K là trung điểm của AC

D là điểm đối xứng với A qua I

+) Ta có MK là đường trung bình của ΔBEC

$\rightarrow$ MK // BE.

Lại có BE $\perp$ AD $\rightarrow$ MK $\perp$ AD

Mặt khác KE = KF

$\rightarrow$MK là đường trung trực của EF $\rightarrow$ME=MF

Phương trình đường thẳng AI đi qua hai điểm E và F là 3x + y – 4 = 0

Gọi A(a;4-3a). Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-a;\frac{4}{3}-4+3a\right)=\left(1-\frac{3a}{2};-4+\frac{9a}{2}\right)$

$\rightarrow$ M $\left(1-\frac{a}{2};\frac{3a}{2}\right)$. Vì ME = MF nên ta có phương trình:

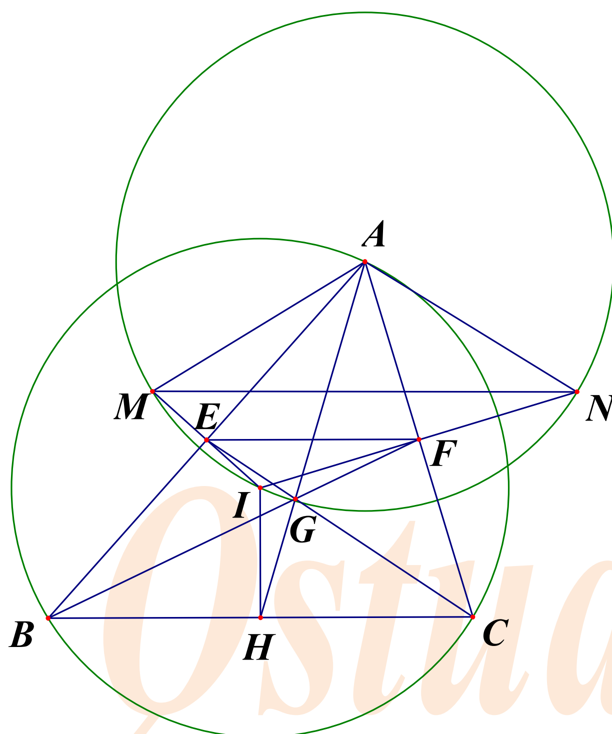
$$\frac{a^2}{4}+\left(\frac{3a}{2}-1\right)^2=\left(\frac{3}{5}+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}+\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow a=0 \rightarrow A(0;4)$$

Vậy A(0;4).

Câu 121. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G$\left(\frac{8}{3};0\right)$ và có đường tròn ngoại tiếp là (C) tâm I. Biết rằng các điểm M(0;1) và N(4;1) lần lượt là các điểm đối xứng của I qua các đường thẳng AB và AC. Đường thẳng BC đi qua điểm K(2;-1). Viết phương trình đường tròn



(C).



+) Dễ thấy AM = AN (= AI)

+) Gọi E, F là trung điểm của AB và AC

$\rightarrow$ E, F cũng là trung điểm của IM và IN

Do đó BC // EF // MN

+) Phương trình đường thẳng BC đi qua K và song song với MN là: y + 1 = 0

Gọi H là trung điểm của BC

$\rightarrow$ H(a;-1)

Vì $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{HG} = 2\left(\frac{8}{3} - a; 1\right) = \left(\frac{16-6a}{3}; 2\right)$

Và $1 + (8-2a)^2 = (4-2a)^2 + 1$ (AM = AN)

Nên a = 3

Do đó H(3;-1) và A(2;2)

+) Phương trình đường thẳng IH đi qua H và vuông góc với BC là x – 3 = 0

Gọi I(3;t) ta có AI = AM = $\sqrt{5}$ nên $1 + (t-2)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 0 \end{array}\right.$

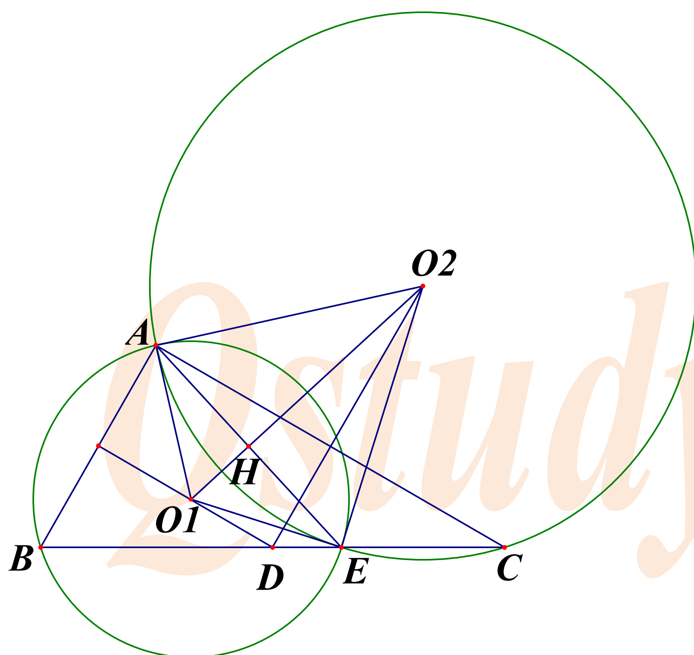
Mặt khác A và I nằm khác phía so với MN $\rightarrow$I(3;0)

Đường tròn (C) có tâm I bán kính AI = $\sqrt{5}$ có phương trình là:

$$(x-3)^2 + y^2 = 5.$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là $(x-3)^2 + y^2 = 5$

Câu 122. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có đỉnh B, C nằm trên Ox, D là trung điểm cạnh BC, điểm E thuộc đoạn DC. Gọi $O_1\left(2;\frac{1}{2}\right)$ và $O_2(7;8)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và tam giác ACE. Tìm tọa độ điểm E và D, biết rằng hoành độ điểm E lớn hơn hoành độ điểm D.



+) ΔO_1AE cân tại O_1 nên

$$\widehat{O_1AE} = 90^o - \frac{1}{2}.\widehat{AO_1E} = 90^o - \widehat{ABC}$$

Tương tự ta có: $\widehat{O_2AE} = 90^o - \widehat{ACB}$

$$\rightarrow \widehat{O_1AO_2} = 180^o - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 90^o$$

+) Vì O_1O_2 là trung trực của AE nên A,E đối xứng qua $O_1O_2 \rightarrow \widehat{O_1EO_2} = 90^o$

Ta có: O_1D // AC, O_2D // AB

$$\rightarrow \widehat{O_1DO} = 90^o$$

+) Tọa độ điểm D, E là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{4}\right)^o = \dfrac{5^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, y = 0 \\ x = 6, y = 0 \end{array}\right.$$

Vì hoành độ điểm E lớn hơn hoành độ điểm D nên D(3;0) E(6;0)

Phương trình đường thẳng O_1O_2 là 3x – 2y – 5 =0

+) Phương trình đường thẳng AE đi qua E và vuông góc với O_1O_2 là: 2x + 3y -12 = 0



Vì H là giao điểm của AE và O_1O_2 nên H(3;2)

H là trung điểm của AE nên A(0;4)

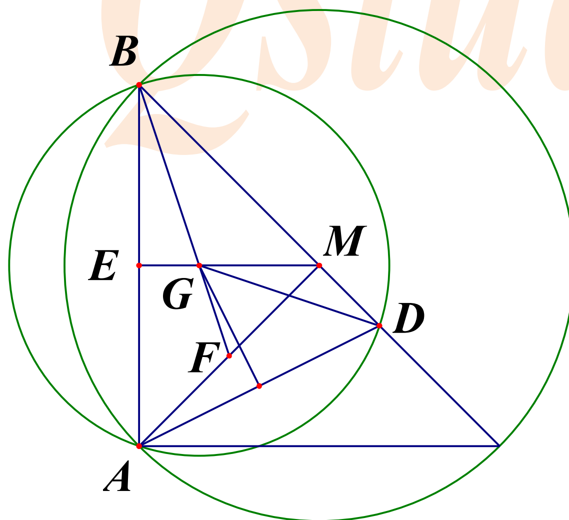
+) Ta có $\overrightarrow{O_1D} = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$ // (2;-1). Đường thẳng AB đi qua A vuông góc với O_1D có phương trình là 2x – y + 4 = 0

B là giao điểm của Ox với AB nên B(-2;0)

Mặt khác: D là trung điểm của BC nên C(8;0)

Vậy A(0;4) B(-2;0) C(8;0)

Câu 123. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của đoạn BC, G là trọng tâm tam giác ABM. D(7;-2) là điểm nằm trên đoạn MC sao cho GA = GD. Viết phương trình đường thẳng AB của tam giác ABC biết đỉnh A có hoành độ nhỏ hơn 4 và phương trình đường thẳng AG là 3x – y – 13 = 0.



+) ΔAMB vuông cân tại M nên GA = GB

Lại có GA = GD nên GA = GB = GD

Do đó G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD

+) MG cắt AB tại E → E là trung điểm AB

Mặt khác $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{BAG} = \widehat{EGA}$

→ tứ giác AGMD nội tiếp

→ $\widehat{AGD} = \widehat{AMD} = 90^O$ → AG ⊥ AD

+) Vì G là hình chiếu của D lên AG → G(4;-1)

Gọi A(a;3a-13) với a<4 thuộc AG



Vì ΔAGD vuông cân nên AG = GD ⇔ $(a-4)^2+(3a-12)^2=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=3 \end{array}\right.$

Vì A có hoành độ nhỏ hơn 4 nên a=3 hay A(3;-4)

Từ đó ta có tọa độ trung điểm N của BM là N$\left(\frac{9}{2};\frac{1}{2}\right)$

+) Phương trình đường thẳng BD đi qua hai điểm D và N là x + y – 5 = 0

Điểm M là hình chiếu của A lên BD $\rightarrow$ M(6;-1)

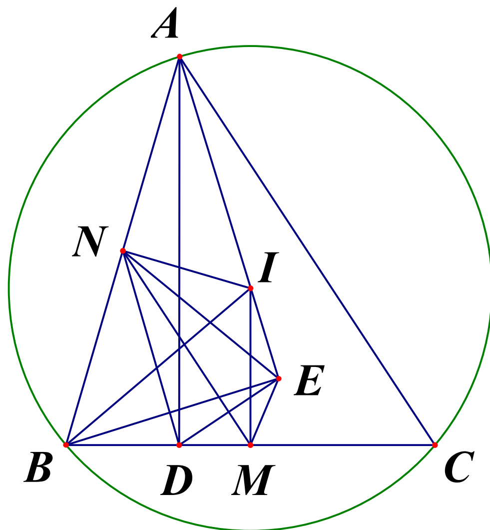
Vì N là trung điểm của BM nên B(3;2)

Phương trình đường thẳng AB đi qua hai điểm A và B là x – 3 = 0

Vậy AB: x – 3 = 0

Câu 124. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Điểm M(2;-1) là trung điểm của BC và điểm E$\left(\frac{31}{13};-\frac{1}{13}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đương thẳng AI. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đường thẳng AC có phương trình 3x + 2y – 13 = 0





+) Gọi D là hình chiếu của A lên BC

N là trung điểm AB

+) Dễ thấy tứ giác BDEA nội tiếp đường tròn đường kính AB

Ngũ giác BNIEM nội tiếp đường tròn đường kính IB

$\rightarrow \widehat{ENM} = \widehat{EBM} = \widehat{EAD} = \frac{1}{2}\widehat{END}$

$\rightarrow$ NM là phân giác góc $\widehat{END}$

+) Lại có NE = ND nên NM là đường trung trực của DE

+) Phương trình đường thẳng MN đi qua M và song song với AC là 3x + 2y – 4 = 0

Phương trình đường thẳng DE đi qua E và vuông góc với MN là 2x – 3y – 5 = 0

Vì MN là trung trực của DE nên D(1;-1) $\rightarrow$ Phương trình đường thẳng BC đi qua hai điểm M và D là y = -1

Vì C là giao điểm của BC và AC nên C(5;-1)

Lại có M là trung điểm BC nên B(-1;-1)

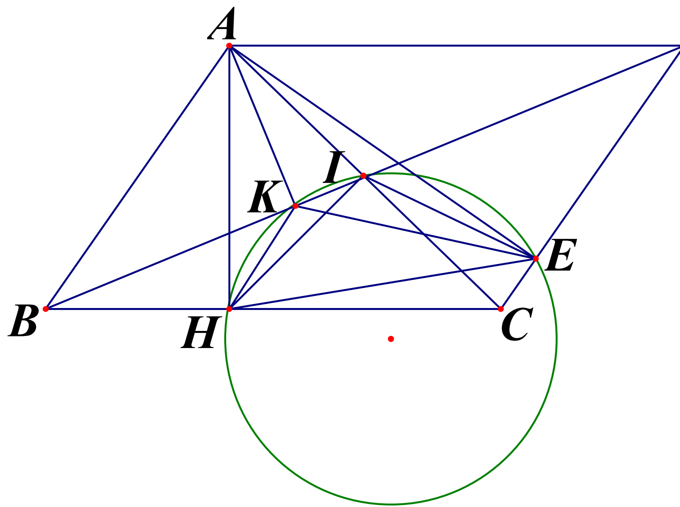
+) Phương trình đường thẳng AD đi qua D và vuông góc với BC là x = 1

A là giao điểm của AD và AC $\rightarrow$A(1;5)

Vậy A(1;5) B(-1;-1) C(5;-1)

Câu 125. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có góc ABC nhọn, A(-2;-1). Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu của A lên BC, BD, CD. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác HKE là (C): $x^2 + y^2 + x + 4y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết H có hoành độ âm, C có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng x – y – 3 = 0.





+) Gọi I là giao điểm của AC và BD

+) Ta có $\widehat{AHC}=\widehat{AEC}=90^o$ nên tứ giác AHCE nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AC

+) Ta có :

$$\widehat{HIE}=2\widehat{HAE}=2(180^o-\widehat{BCD})$$

Vì AKED và AKHB là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EKD}=\widehat{EAD}$ và $\widehat{BKH}=\widehat{BAH}$

Do đó $\widehat{HKE}=180^o-\widehat{DKE}-\widehat{HKB}=180^o-\widehat{EAD}-\widehat{BAH}=2\widehat{HAE}=2(180^o-\widehat{BCD})=\widehat{HIE}$

$\rightarrow$ HKIE là tứ giác nội tiếp $\rightarrow$ I thuộc đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác HKE

+) Gọi C(c;c-3) thuộc đường thẳng d (c>0) $\rightarrow$ I $\left(\frac{c-2}{2};\frac{c-4}{2}\right)$

Lại có I nằm trên đường tròn (C) nên $c^2-c-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=2\\c=-1\end{array}\right.$. Vì c>0 nên c=2 $\rightarrow$ C(2;-1) và I(0;-1)

+) Vì E và H là giao điểm của đường tròn đường kính AC với đường tròn (C) và H có hoành độ âm nên H $\left(-\frac{8}{5};-\frac{11}{5}\right)$ và E(0;-3)

Phương trình đường thẳng AB là x – y + 1 = 0

Phương trình đường thẳng BC là x – 3y – 5 = 0

B là giao điểm của AB và BC nên B(-4;-3)

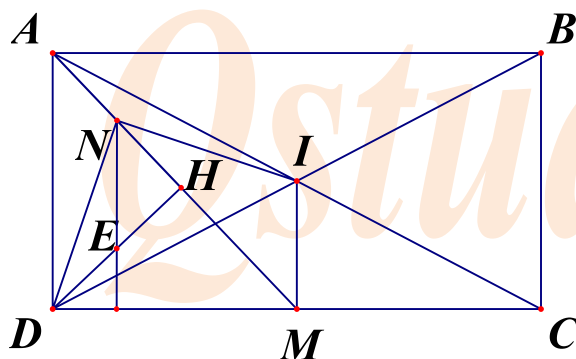
+) Kiểm tra : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=16>0$ (thỏa mãn tam giác ABC nhọn)

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên D(4;1)

Vậy B(-4;-3) C(2;-3) D(4;1)



Câu 126. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD tâm I. Gọi M là trung điểm CD, H là hình chiếu của D lên AM và N là trung điểm AH. Tìm tọa độ các đỉnh B,D biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN là (C): $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$ và đỉnh D có hoành độ nguyên nằm trên đường thẳng 2x – y = 0.



+) Đường tròn (C) có tâm J$\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$ bán kính R=$\frac{\sqrt{10}}{2}$

Gọi E là trung điểm HD.

Vì NE là đường trung bình của ΔMAD nên:

$$\begin{cases} NE//AD//IM \\ NE=\frac{1}{2}AD=IM \end{cases}$$

$\rightarrow$ Tứ giác IMEN là hình bình hành.

Và NE $\perp$ MD do AD $\perp$ MD

Do đó E là trực tâm của Δ MND $\rightarrow$ ME $\perp$ ND $\rightarrow$ IN $\perp$ ND

Do đó tứ giác IMDN là tứ giác nội tiếp

+) Vì D là giao điểm của (C) với đường thẳng 2x – y = 0 và D có hoành độ nguyên nên D(3;6)

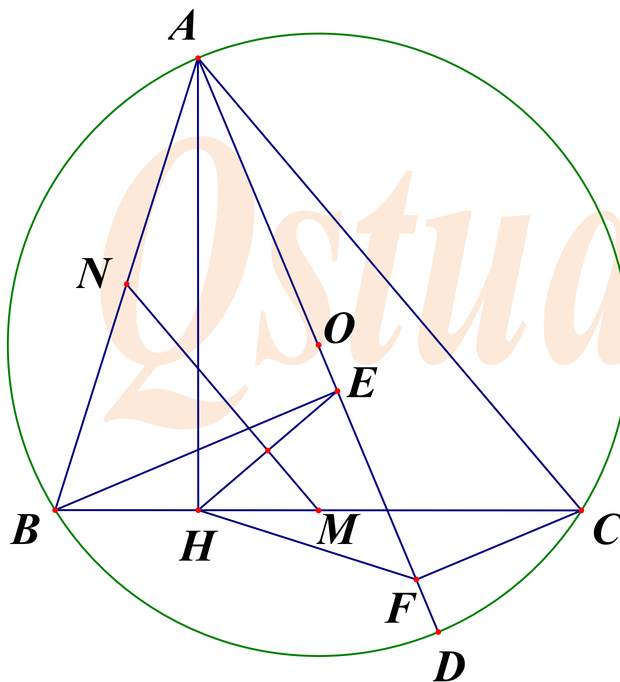
Lại có J là trung điểm của ID nên I(2;3)

Mặt khác I là trung điểm của BD nên B(1;0)

Vậy B(1;0)   D(3;6)



Câu 127. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I có B(-3;4). Gọi D và H lần lượt là điểm đối xứng với A qua I và chân đường vuông góc hạ từ A trên BC. Giả sử E là hình chiếu vuông góc của B lên AD. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF biết rằng phương trình đường thẳng AH 2x – y = 0 và phương trình đường thẳng CD là x + 3y – 3 = 0.



+) Gọi N là trung điểm của AB

Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^o$

$\rightarrow$ tứ giác AEHB nội tiếp đường tròn tâm N đường kính AB

$\rightarrow$ NH = NE $\rightarrow$ N nằm trên đường trung trực của HE

+) Lại có: $\begin{cases} \widehat{BAD} + \widehat{EHB} = 180^o \\ \widehat{EMH} + \widehat{EHB} = 180^o \end{cases}$

$\rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{EMH}$

Mặt khác $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$)

$\rightarrow \widehat{EMH} = \widehat{BCD}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\rightarrow$ HE // CD $\rightarrow$ HE $\perp$ AC

+) Ta có MN là đường trung bình của ΔABC

$\rightarrow$ MN // AC $\rightarrow$ MN $\perp$ HE

Mà N nằm trên trung trực của HE $\rightarrow$ MN là trung trực của HE

+) Tương tự ta có M cũng nằm trên trung trực của HF



→ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF

+) Phương trình đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AH là x + 2y – 5 = 0

C là giao điểm của CD và BC → C(9;-2)

H là giao điểm của AH và BC → H(1;2)

Lại có MH= $\sqrt{5}$

→Phương trình đường tròn tâm M bán kính MH là: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF là $(x-3)^2+(y-1)^2=5$



CHÚC CÁC EM HỌC TỐT